**самостійна робота №**

**Тема:** Повний диференціал. Часткові похідні вищих порядків

Мета: набути навички і вміння знаходити повного диференціалу, та часткових похідних вищого порядку. отримувати знання за темою самостійно; відпрацювати основні навички, прийоми розв’язань; засвоїти уміння самостійно використовувати знання, навички,

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

Допоміжна:

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

**План:**

Повний диференціал функції.

Знаходження повного диференціала

Поняття похідної вищих порядків

Знаходження другої похідної

**Методичні рекомендації:**

ввести поняття похідної вищих порядків,

формування умінь у знаходженні похідних другого порядку потім вищих порядків;

**Конспективний виклад питань:**

**Повний диференціал функції.**

Повний приріст функції https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image002.gif визначається за формулою

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image004.gif,                                      **(2.1)**

де https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image006.gif  і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image008.gif - прирости незалежних змінних.

***Повним диференціалом***функції https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image002.gif називається головна лінійна відносно https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image006.gif і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image008.gif частина приросту функції, яка обчислюється за формулою

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image011.gif,                                                    **(2.2)**

де https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image013.gif, https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image015.gif.

Для наближеного обчислення значення функції двох змінних користуються  наближеною рівністю

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image017.gif.               **(2.3)**

         Ця наближена рівність тим точніша, чим менше величини https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image019.gif і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image021.gif.

Нехай https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image002.gif - функція двох змінних https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image024.gif і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image026.gif, кожна з яких, в свою чергу, є функцією незалежної змінної https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image028.gif: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image030.gif, https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image032.gif. Тоді функція https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image034.gif є ***складеною функцією змінної https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image028.gif***.

Похідну цієї функції знаходять за формулою

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image037.gif.                                                 **(2.4)**

Зокрема, якщо https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image002.gif , а https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image040.gif, то

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image042.gif.                                                      **(2.5)**

Нехай https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image002.gif - функція двох змінних https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image024.gif та https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image026.gif, які також залежать від змінних https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image047.gif та https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image049.gif: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image051.gif, https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image053.gif. Тоді функція https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image055.gif є ***складеною функцією незалежних змінних https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image047.gif*** та https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image049.gif, а її частинні похідні по цим змінним обчислюються за формулами:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image059.gif                      **(2.6)**

***Зразки розв’язування задач***

1.**Знайти повний диференціал функцій:**

а) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image061.gif.

            Знайдемо частинні похідні:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image063.gif;   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image065.gif.

За формулою (2.2) будемо мати:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image067.gif.

б) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image069.gif.

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image071.gif;   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image073.gif.

Отже, https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image075.gif.

в) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image077.gif.

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image079.gif;   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image081.gif. Будемо мати: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image083.gif.

г) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image085.gif.

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image087.gif;

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image089.gif.

Тоді отримаємо:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image091.gif.

2.**Обчислити наближено за допомогою повного диференціала: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image093.gif.**

     Розглянемо    функцію   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image095.gif,   тоді     https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image097.gif;    https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image099.gif.  Покладемо, що https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image101.gif, https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image103.gif, обчислимо https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image105.gif,       https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image107.gif. Тоді  https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image109.gif. Знаходимо частинні похідні і їх значення в точці https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image111.gif, а саме

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image113.gif,  тоді  https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image115.gif;

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image117.gif,  тоді  https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image119.gif.

Повний диференціал

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image121.gif.

Користуючись формулою (2.3), отримаємо: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image123.gif, а саме: https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-2-pohidna-skladena-funktsiya.files/image125.gif.

**Частинні похідні вищих порядків.**

Якщо задано функцію https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image003.gif і обчислені її частинні похідні https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image007.gif і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image011.gif, то вони також є функціями незалежних змінних https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image013.gif і https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image017.gif, а тому від кожної із них можна обчислити похідні як по змінній https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image013.gif так і по змінній https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image017.gif.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються ***частинними похідними другого порядку***. Вони позначаються:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image025.gif,          https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image029.gif,

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image033.gif,         https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image037.gif.

Аналогічно означаються і позначаються частинні похідні вищих порядків.

Частинні похідні, які відмінні одна від одної лише порядком диференціювання, називаються ***мішаними похідними***. Вони є рівними між собою при умові їх неперервності, тобто https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image041.gif.

***Похідна від неявної функції***, яку задано рівнянням https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image045.gif може бути обчислена за формулою:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image049.gif.                                                         **(2.7)**

***Частинні похідні неявної функції*** https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image053.gif, заданої рівнянням https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image057.gif, можуть бути обчисленні за формулами:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image061.gif,        https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image065.gif.                                           **(2.8)**

***Задача***

2.**Знайти частинні похідні другого порядку:**

а) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image069.gif.

             Знайдемо  перші похідні:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image073.gif,    https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image076.gif.

   Знайдемо другі похідні:

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image080.gif,   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image084.gif,

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image087.gif,   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image091.gif.

б) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image095.gif.

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image099.gif,   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image103.gif;

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image106.gif,   https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image110.gif,

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image114.gif,     https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image118.gif.

в) https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image122.gif.

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image126.gif,    https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image130.gif;

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image134.gif,

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image138.gif,

https://fizmat.7mile.net/matanaliz-pr/02-3-chastinni-pohidni.files/image140.gif

**Питання для самоконтролю:**

1) Правило знаходження похідної другого порядку.

2) Механічний зміст похідної другого порядку.

3) Похідна n-го порядку.

**Додаткові матеріали:**

**Похідні вищих порядків**  
**1. Правило знаходження похідної другого порядку**  
***Похідна другого порядку*** це є похідна першого порядку від похідної першого порядку, тобто http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_67e79a71.gif.  
  
Похідна другого порядку позначається одним із таких символів: http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m44b6827c.gif.  
Правило знаходження похідної другого порядку:  
  
***Щоб знайти від функції***http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_120406d.gif***похідну другого порядку, треба знайти спочатку від цієї функції похідну першого порядку***http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m2d4ee4bd.gif***, а потім від похідної***http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m2d4ee4bd.gif***знайти ще похідну першого порядку.***  
**^ 2. Механічний зміст похідної другого порядку**  
***Механічний зміст похідної другого порядку:*** похідна другого порядку дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.  
**^ 3. Похідна n-го порядку**  
***Похідною n-го порядку***, або n-ю похідною називається похідна першого порядку, якщо вона існує, від похідної (n-1)-го порядку, і позначається одним із символів: http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m5495c111.gif, http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m645c0a65.gif.  
Отже, згідно з означенням похідної n-го порядку, маємо таку рівність: http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_m5495c111.gif=http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_2d80b88f.gif, звідси випливає ***правило знаходження похідної n-го порядку***, а саме, щоб знайти похідну n-го порядку, треба функцію http://nauch.com.ua/pars_docs/refs/4/3047/3047_html_120406d.gif про диференціювати послідовно n раз.