**самостійна робота №**

**Тема:** Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій. .

Мета: узагальнити та систематизувати теоретичні знання з теми, набути навичок і вмінь інтегрування раціональних дробів, інтегрування тригонометричних функцій, інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

Допоміжна:

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

**План:**

Інтегрування раціональних дробів.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

**Методичні рекомендації:**

1. Повторити виділення цілої частини

2. Повторити метод заміни змінної у невизначеному інтегралі, метод інтегрування за частинами

3. інтегрування раціональних дробів, інтегрування тригонометричних функцій, інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

**Конспективний виклад питань:**

**Означення.** Раціональним дробом називається дріб вигляду http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image002.gif, де Р(х) та Q*(х) -* многочлени. Раціональний дріб називається правильним, коли степінь *Р(х)* нижчий степеня Q*(х),* в протилежному випадку дріб називається неправильним. У неправильному дробі завжди можна виділити цілу частину і зобразити його у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Кожний правильний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів типу:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image004.gif (m – ціле число, m > 1),

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image006.gifhttp://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image008.gif (n – ціле число, n > 1, квадратний тричлен х2+ рх +q не має дійсних коренів).

Такий розклад є єдиний, але методи розкладу різноманітні, з яких найбільш уживаний метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод ґрунтується на наступному:

1) якщо задано неправильний раціональний дріб, треба виділити з нього цілу частину, тобто привести до вигляду:

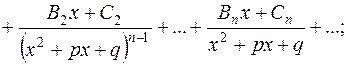
http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image010.gif= http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image012.gifде М(х) – многочлен, а http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image014.gif- правильний раціональний дріб;

2) розкласти знаменник дробу на прості множники першого та другого степеня:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image016.gifде http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image018.gif< 0, тобто тричлен http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image020.gifне має дійсних коренів;

3) правильний раціональний дріб розкласти на суму елементарних:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image022.gif



обчислити невизначені коефіцієнти А1, А2,…, Аm,…, В1, С1, В2, С2,…, Вn, Сn,…; для цього привести останню рівність до спільного знаменника, а потім порівняти коефіцієнти при однакових степенях *х* в лівій і правій частинах одержаної тотожності та розв’язати систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Ці невідомі коефіцієнти можна знайти іншим способом, надаючи в одержаній тотожності змінній *х* довільних числових значень. В багатьох випадках корисно використовувати обидва способи обчислення невідомих коефіцієнтів.

4) Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image026.gif

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image028.gif

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image030.gif<0.

Спочатку виділяють в чисельнику дробу http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image032.gifпохідну знаменника, тобто чисельник записують в вигляді:

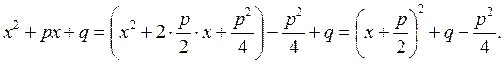
http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image034.gifТоді:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image036.gif

В першому інтегралі чисельник є похідною знаменника, тому

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image038.gif

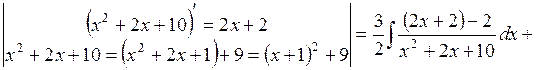
Перш ніж знайти другий інтеграл, треба перетворити квадратний тричлен в знаменнику, виділивши повний квадрат:



Тоді другий інтеграл зводиться до табличного арктангенса, або “високого” логарифма.

**Приклад 1.** Знайти інтеграл: http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image042.gif.

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image044.gif

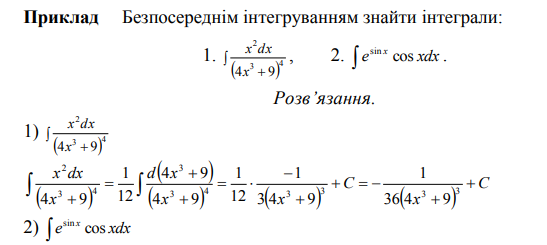


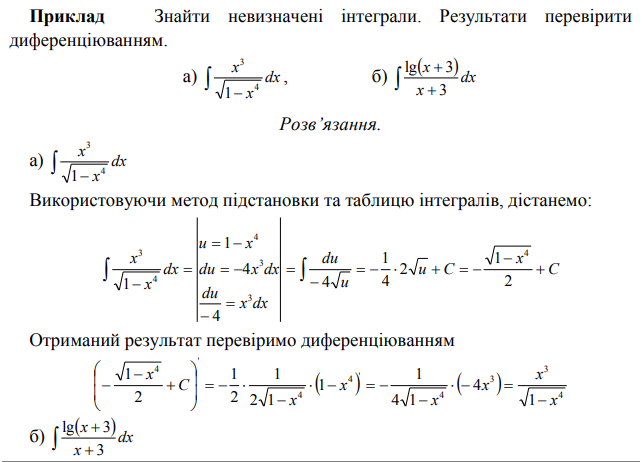
http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image048.gif

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image050.gif

**Зауваження.** Якщо квадратний тричлен має вигляд (*ax2+bx+c*), тоді його треба перетворити так:

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image052.gifі звести знаходження інтеграла http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image054.gifдо розглянутого раніше інтеграла http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image056.gif.

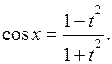
****

****

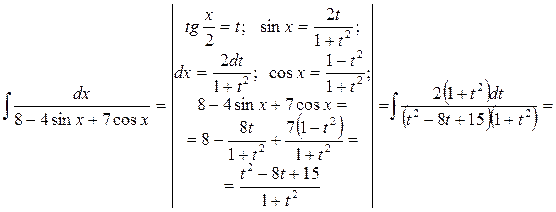
**Інтегрування деяких тригонометричних функцій**.

Інтеграли типу http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image136.gifзводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної підстановки http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image138.gif

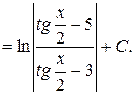
Тоді

http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image140.gif http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image142.gifhttp://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image144.gif

**Приклад 4**. Знайти інтеграл: http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image148.gif.



http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image152.gif

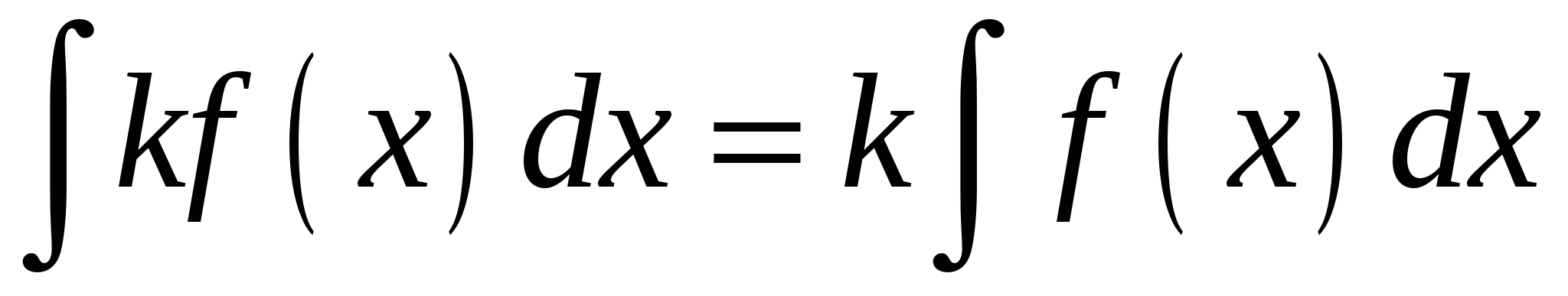
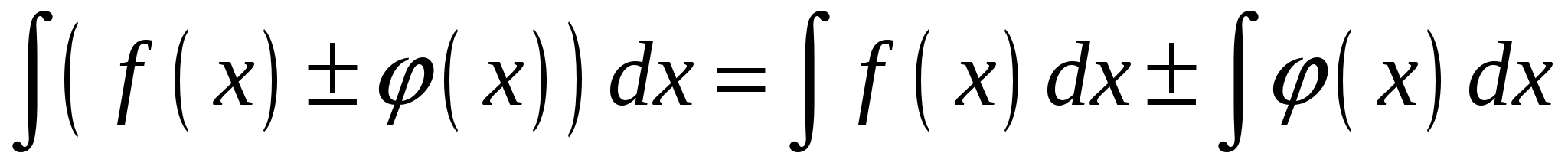
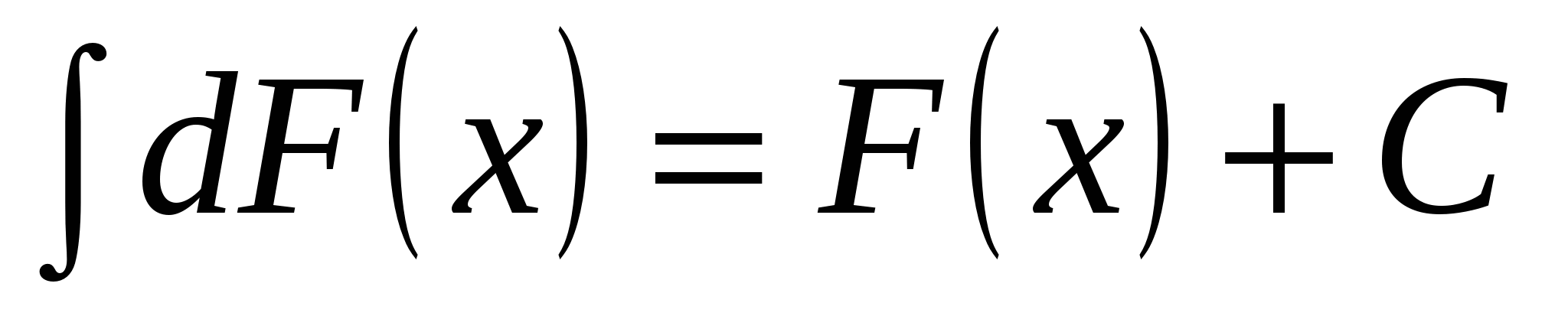
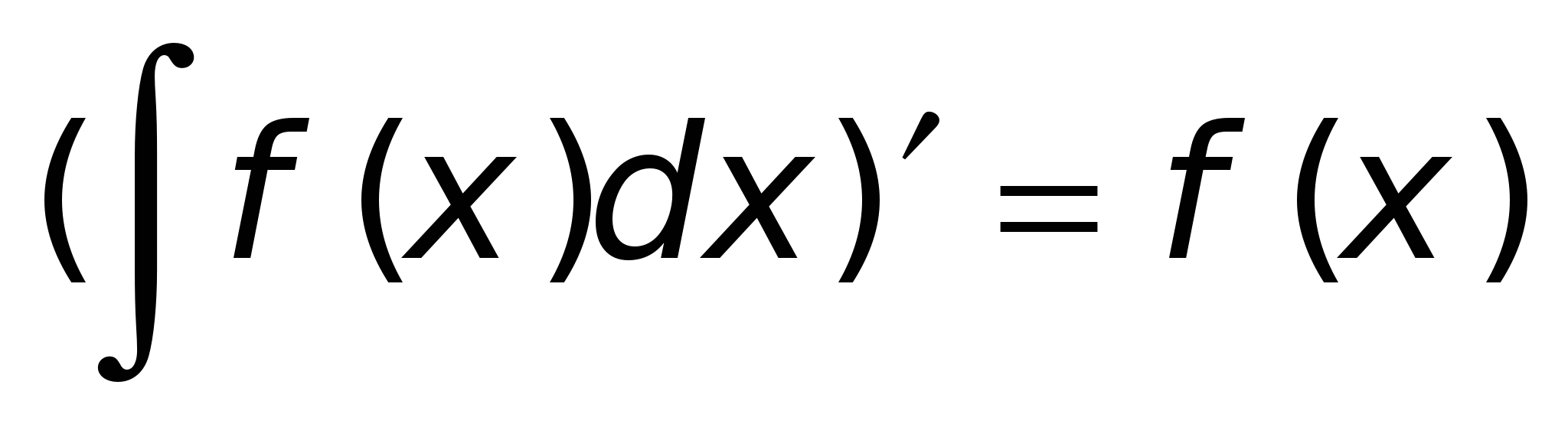
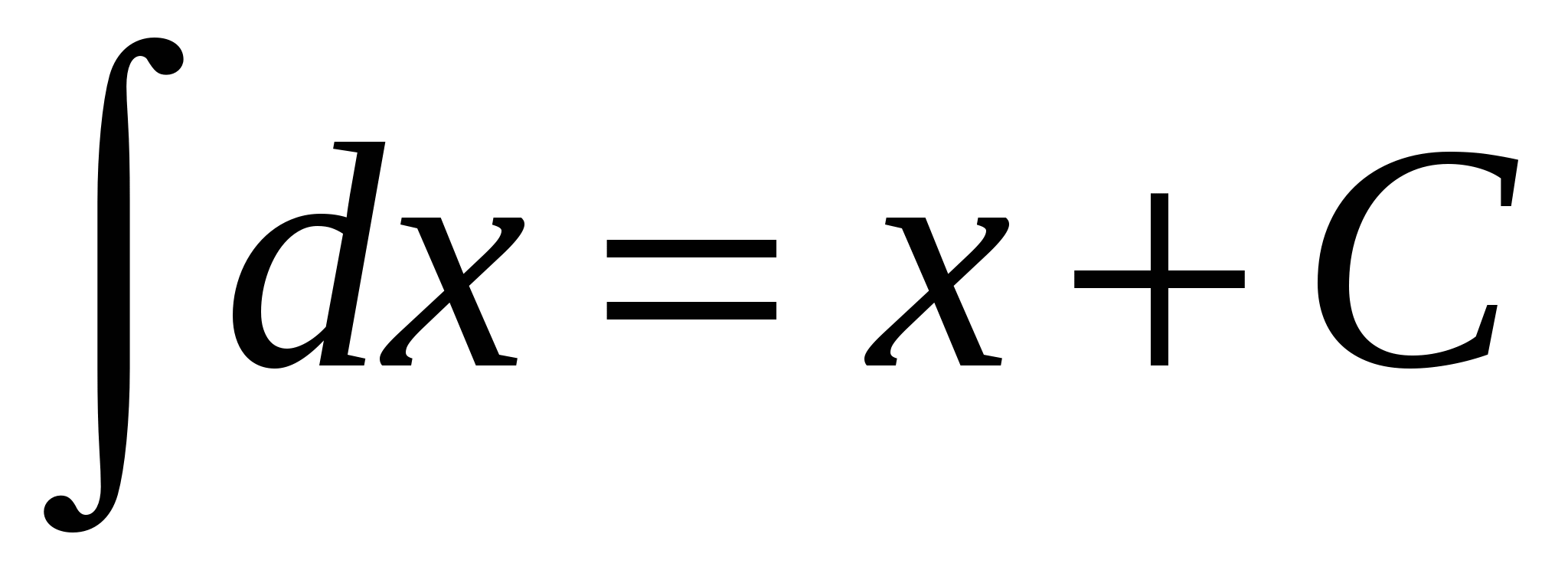
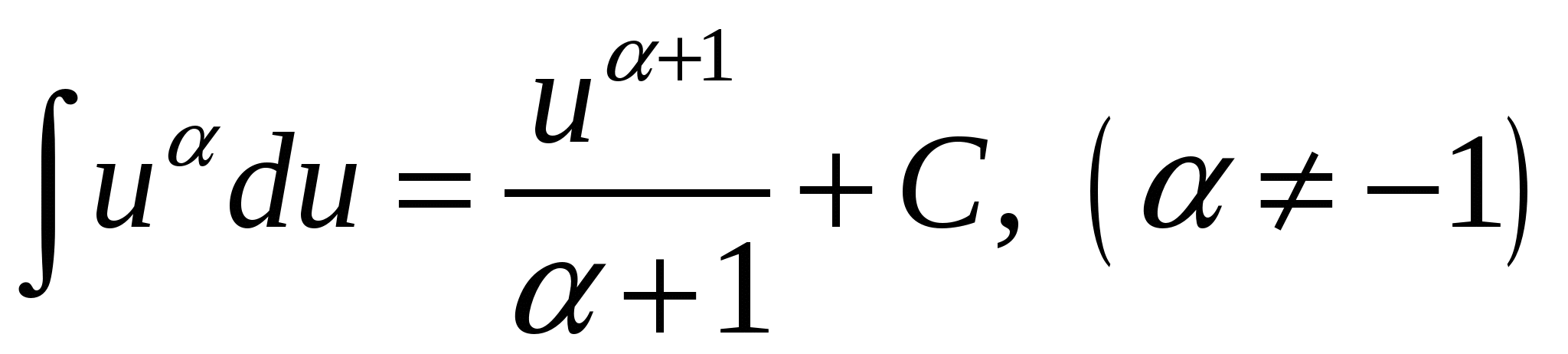
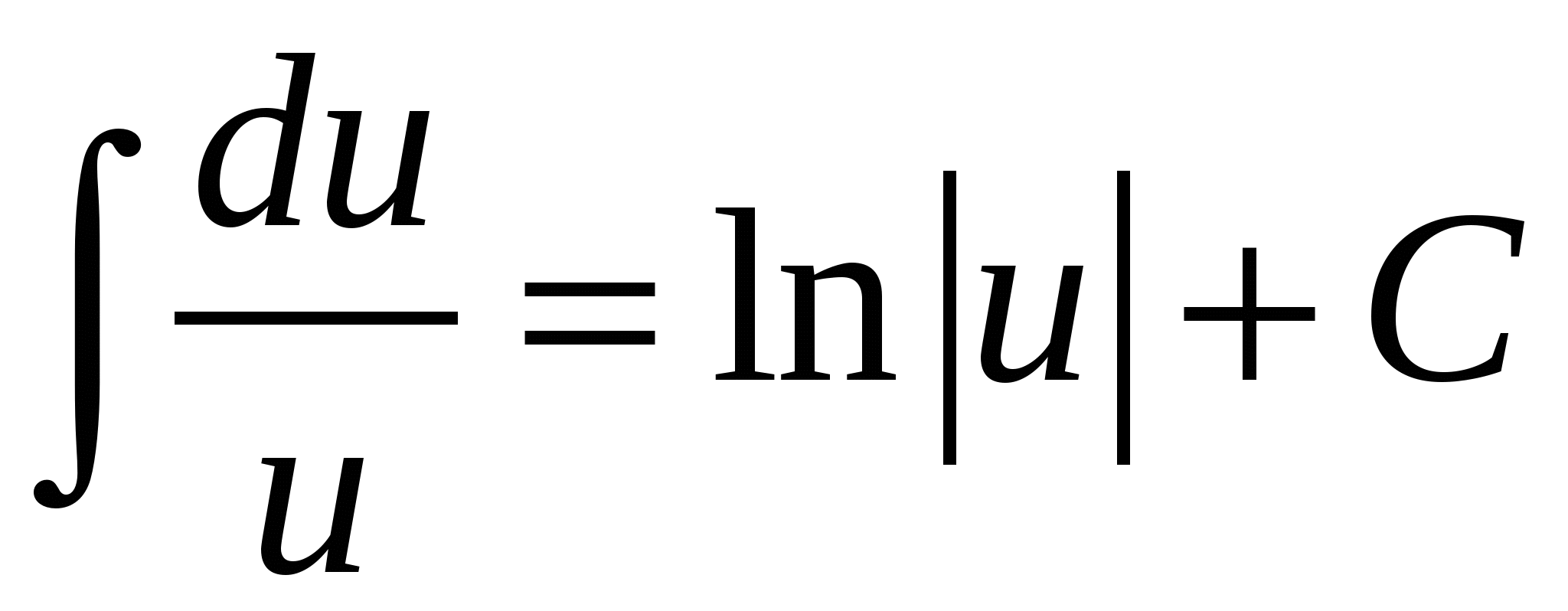
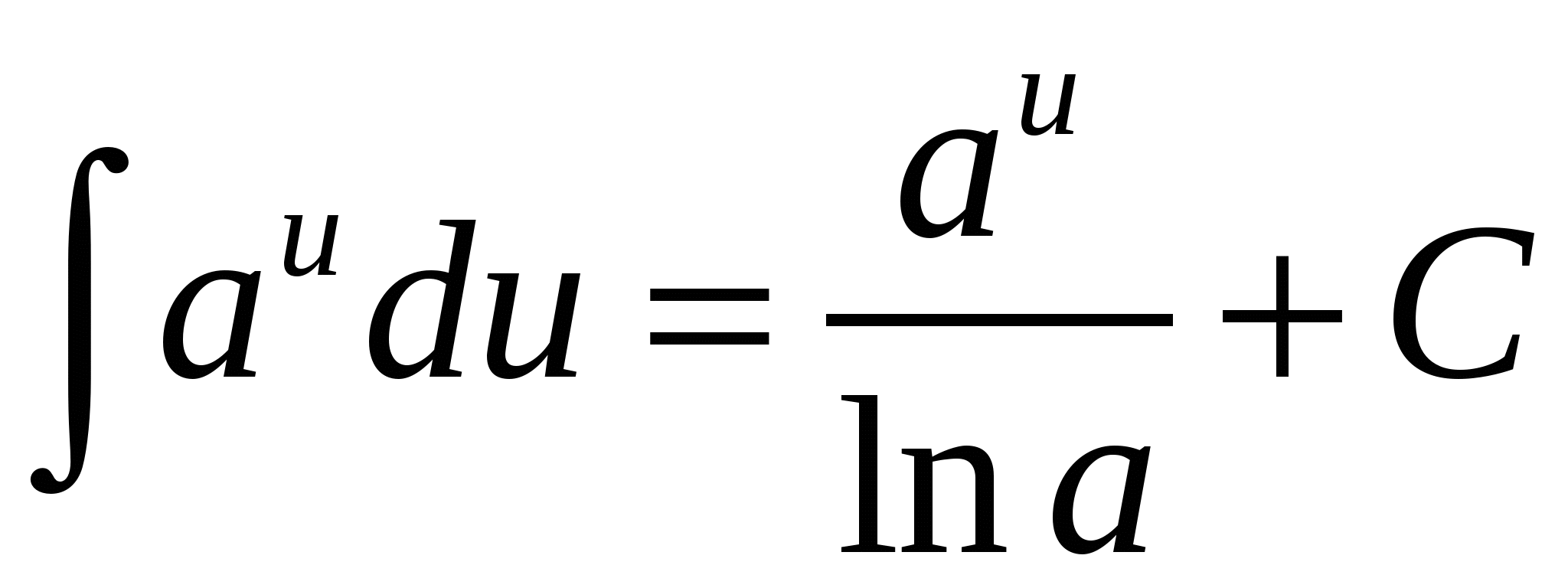
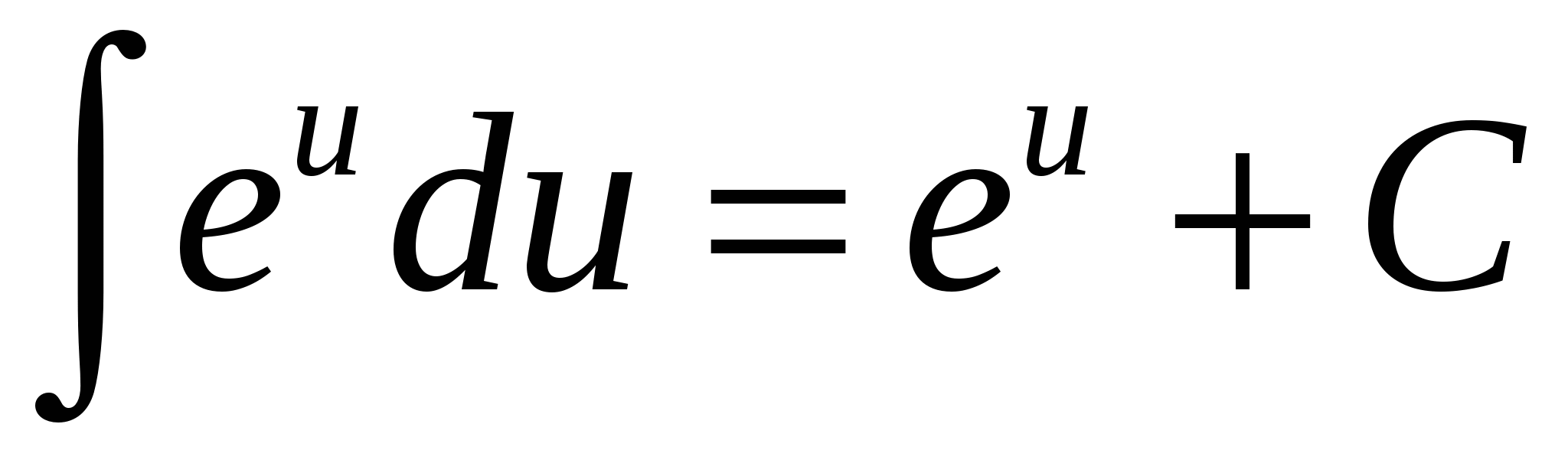
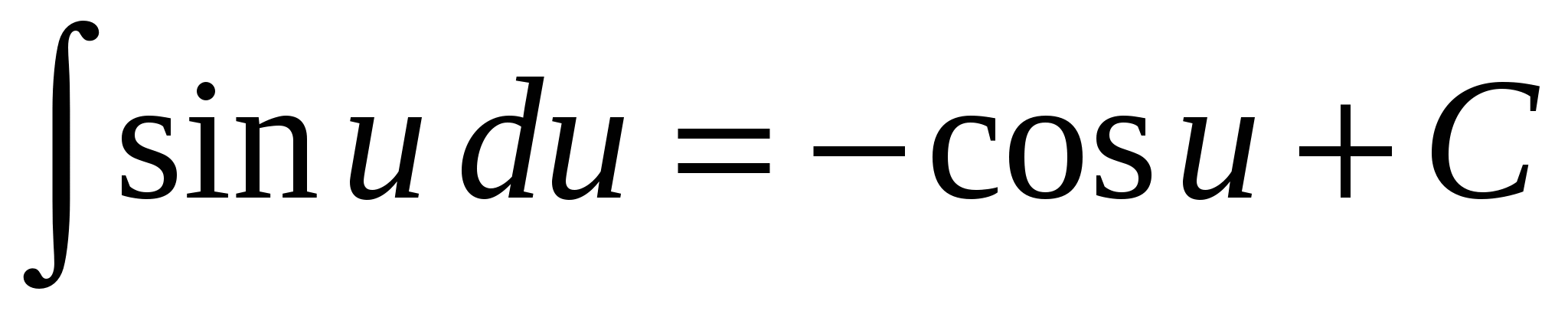
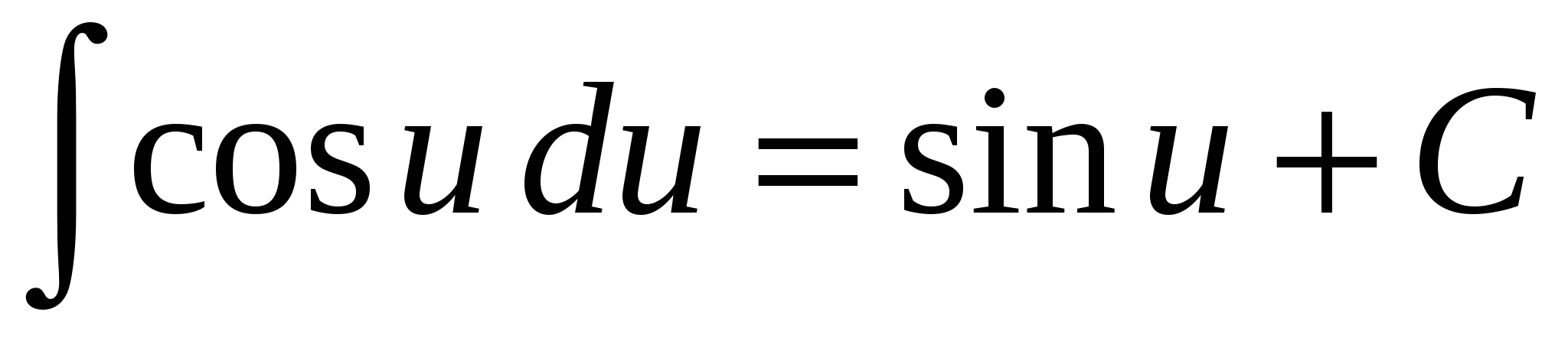
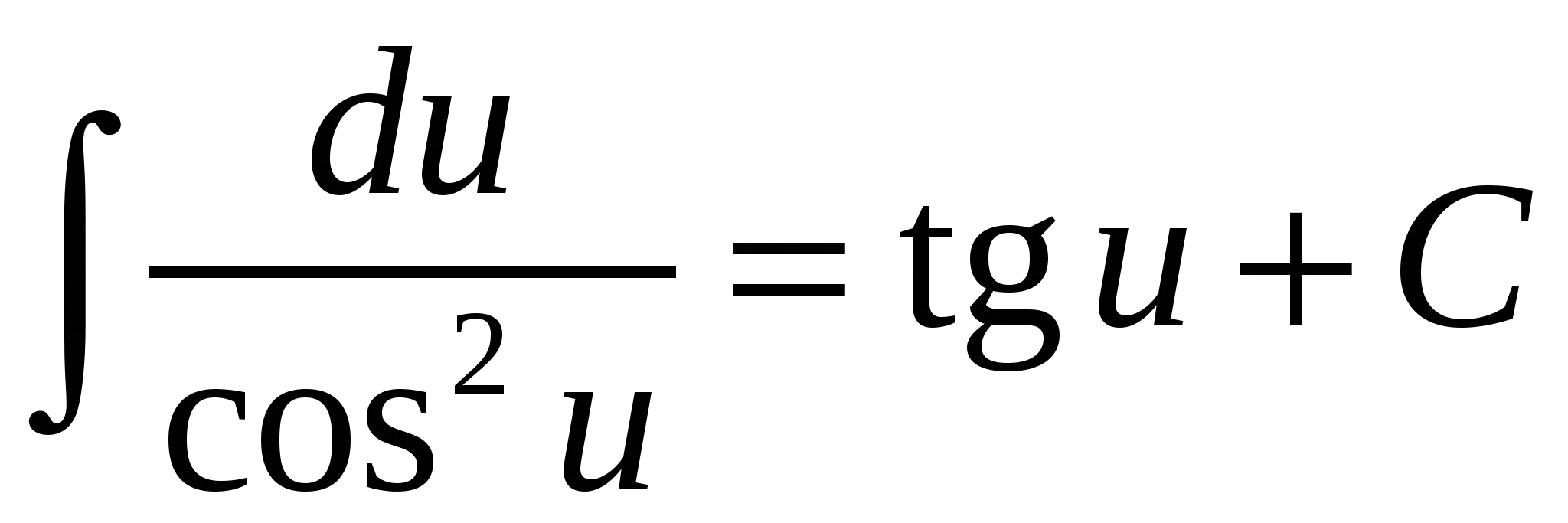
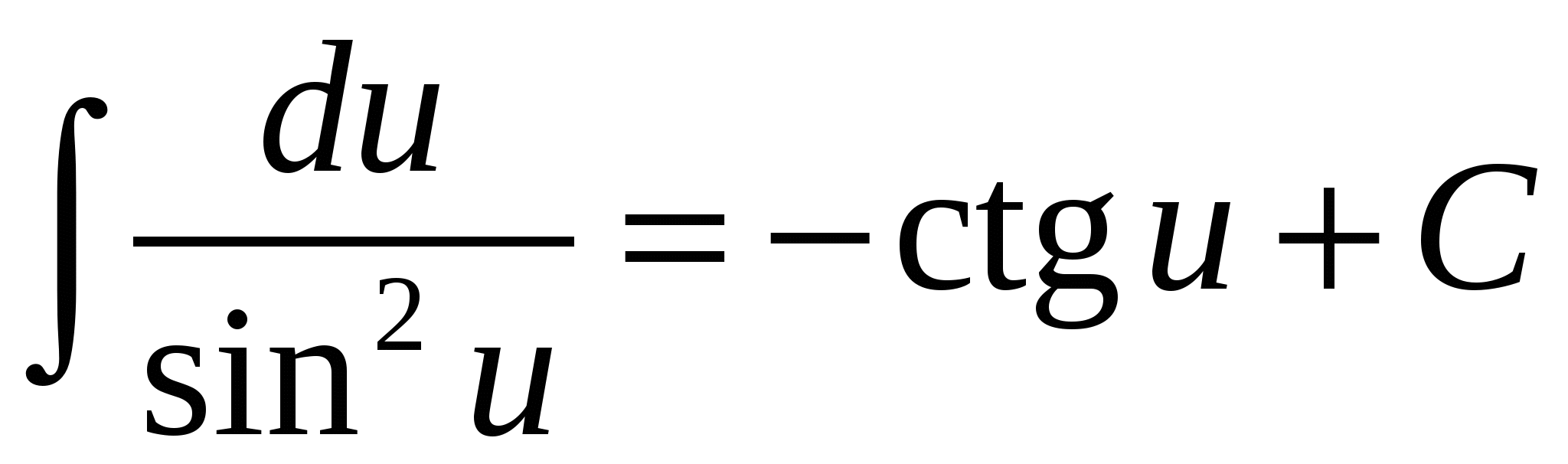
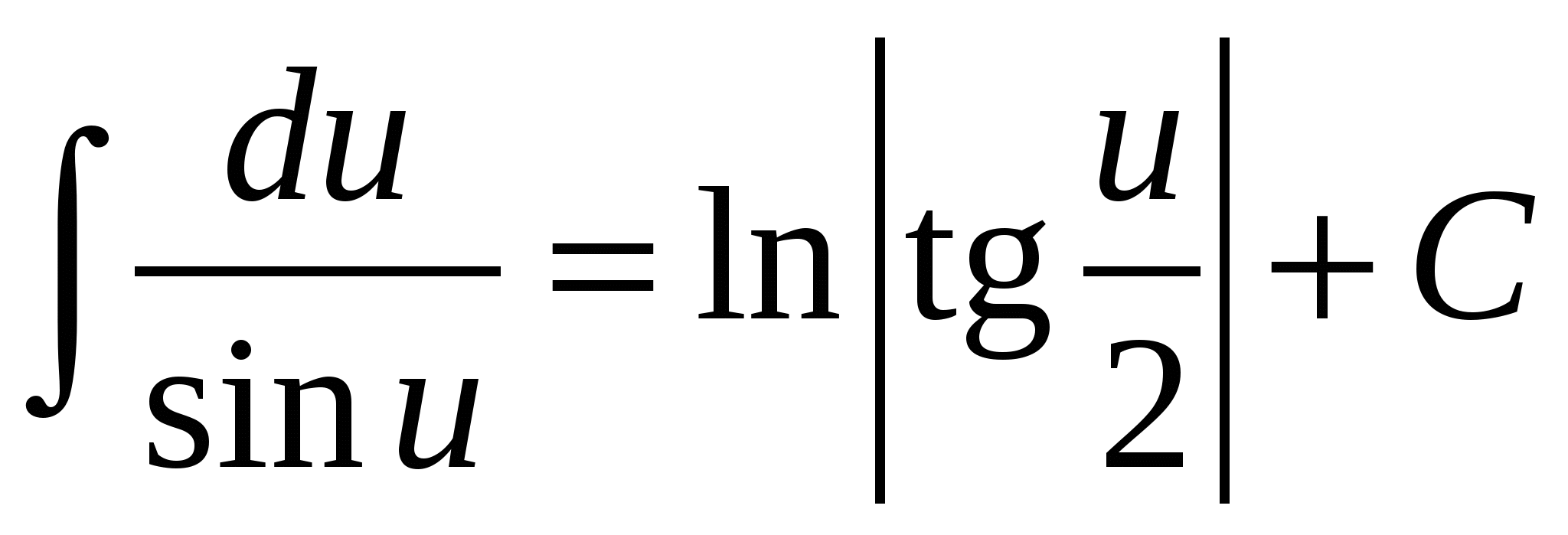
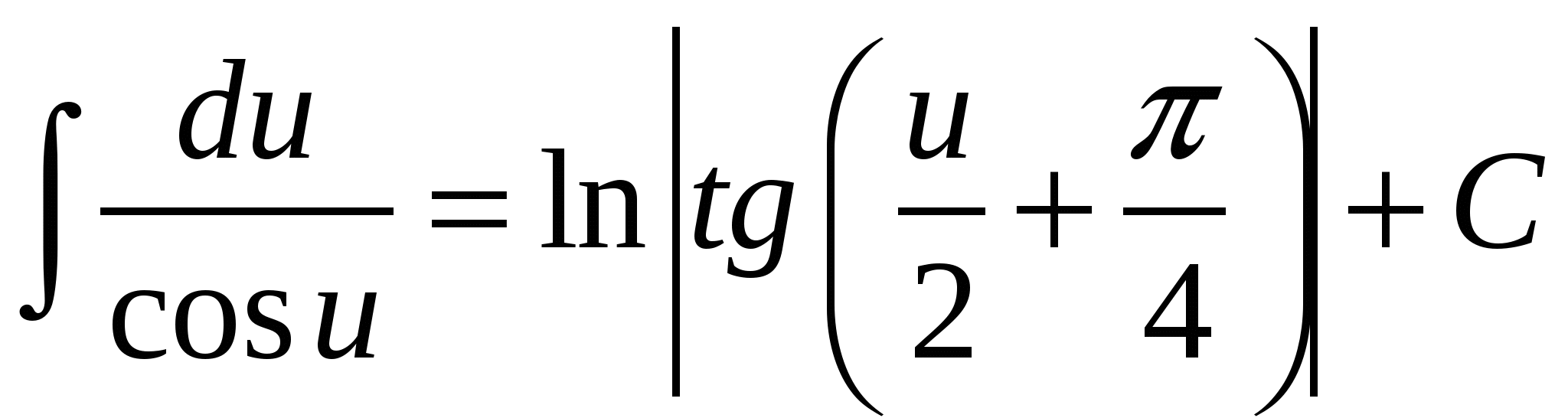
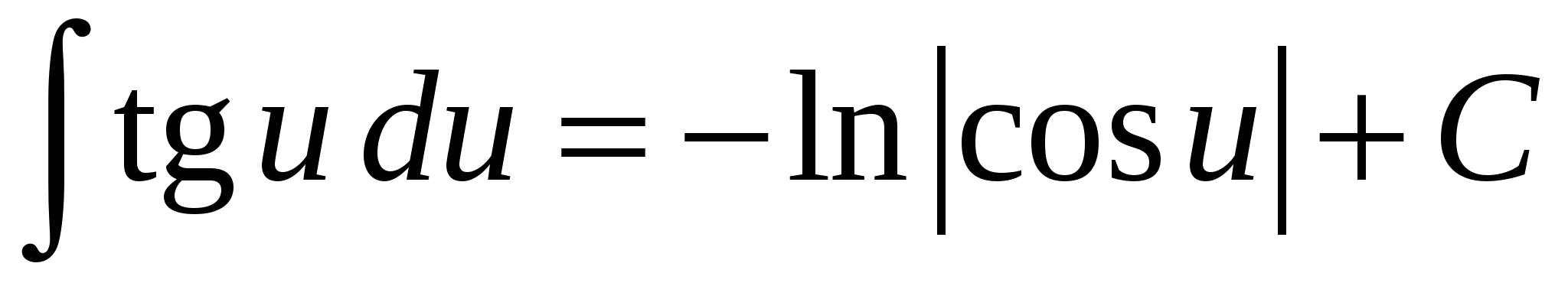
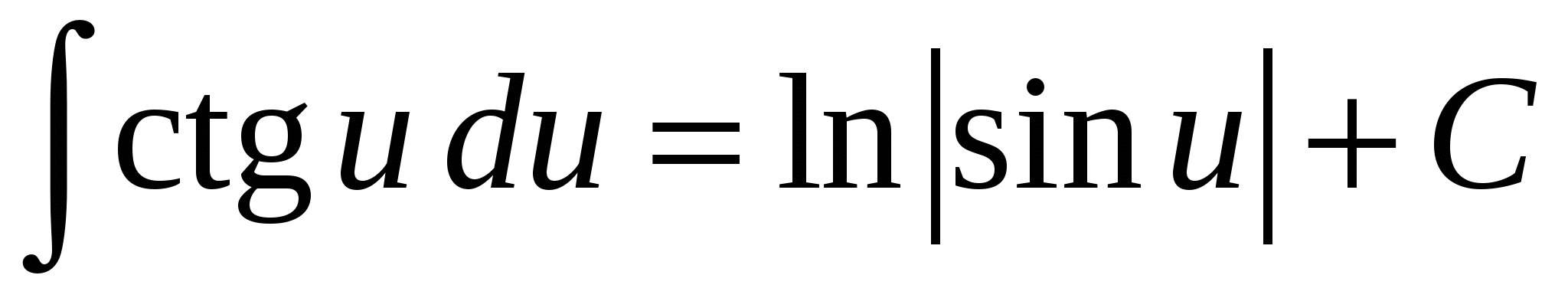
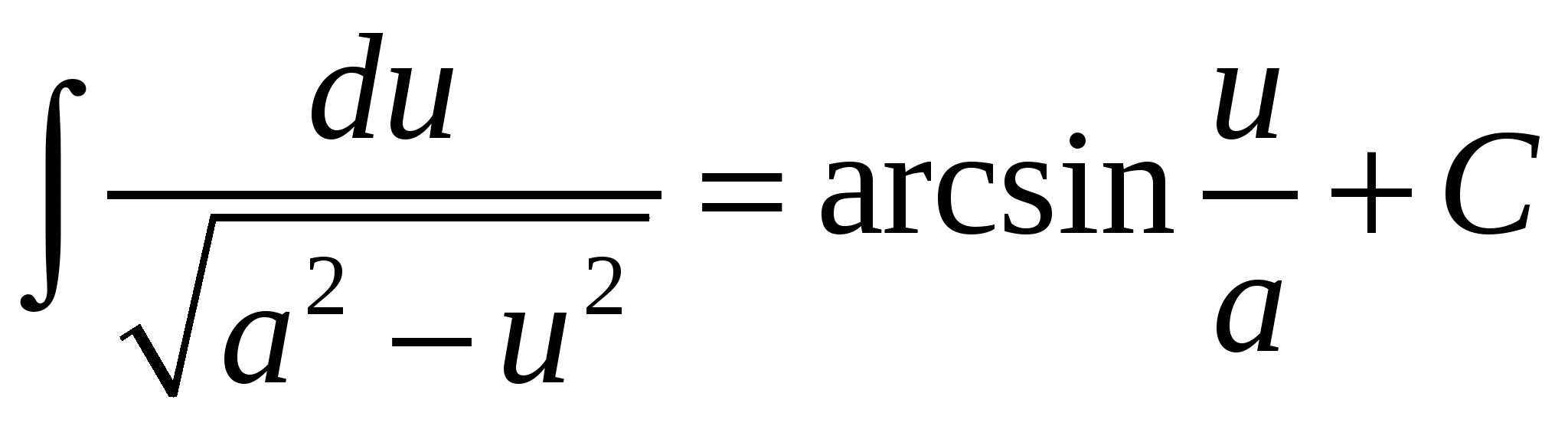
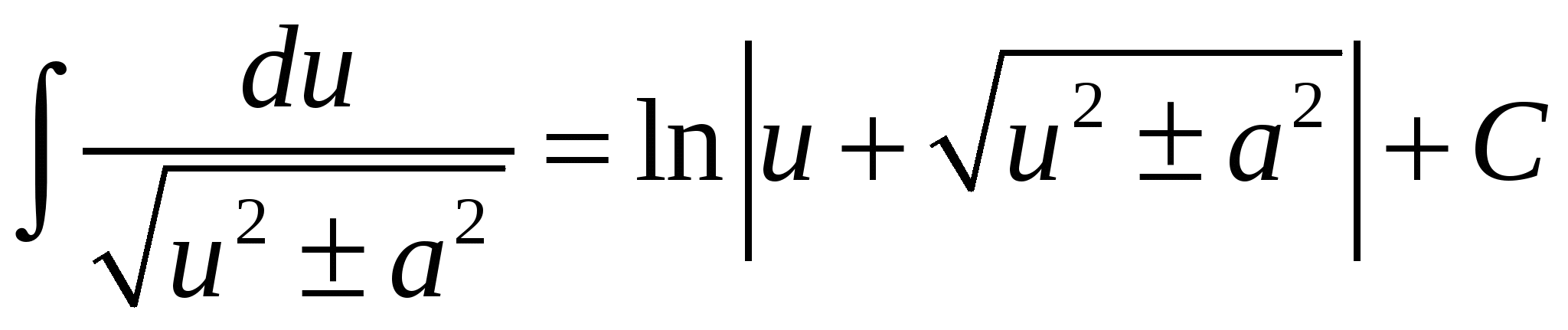
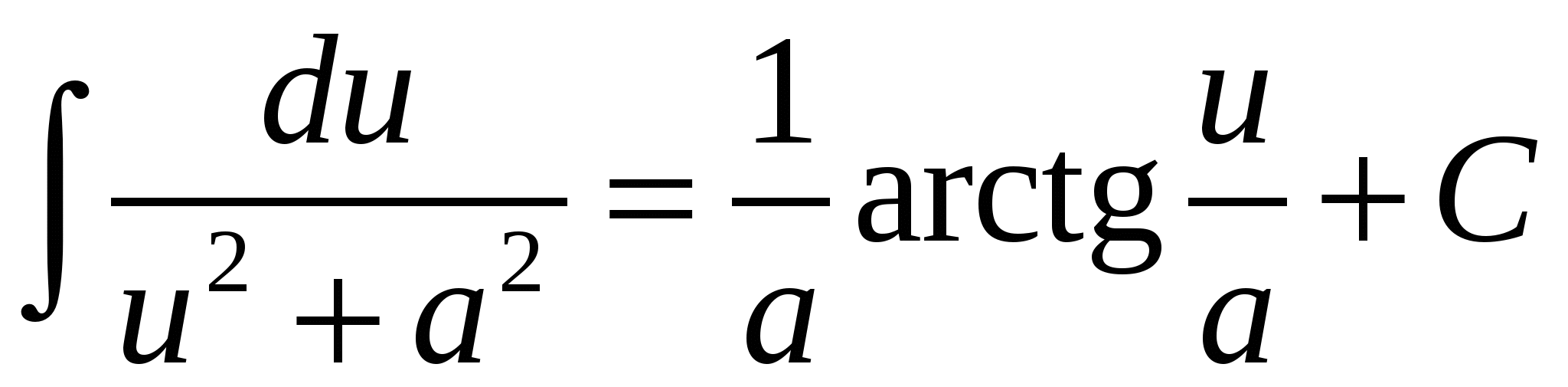
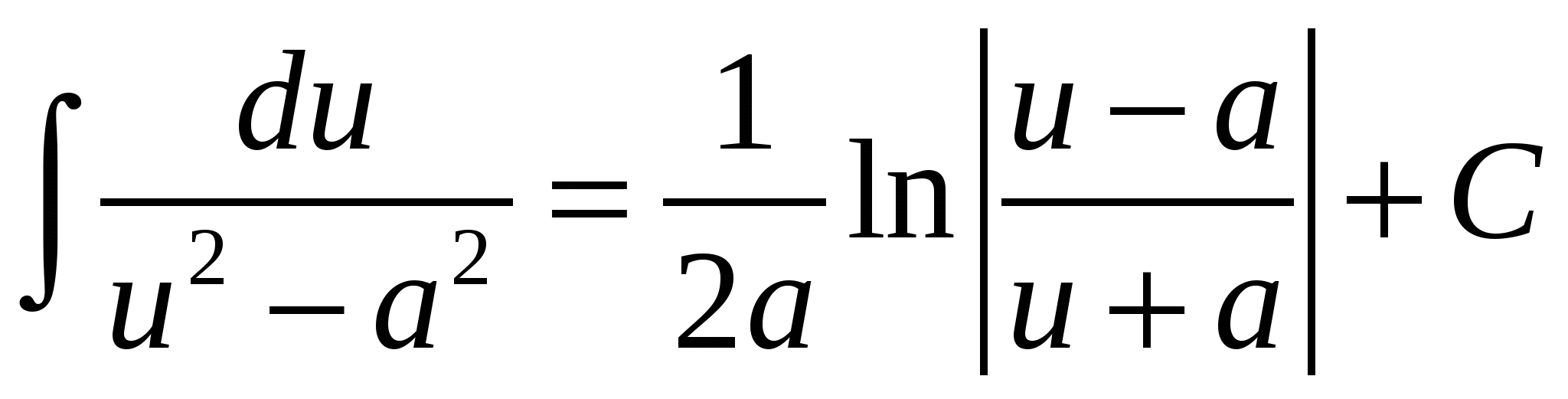
http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image154.gifhttp://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image155.gif

Слід зауважити, що універсальна підстановка в багатьох випадках веде до складних обчислень, тому на практиці здебільшого застосовують інші підстановки, за допомогою яких швидше можна знайти інтеграл, а саме:

а) якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image159.gif- непарна функція відносно http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image161.gif, тобто якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image163.gifто приймають *cos x = t*;

б) якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image159.gif- непарна функція відносно http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image166.gif, тобто якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image168.gifто приймають *sin x = t*;

в) якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image159.gif- парна функція відносно http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image161.gifі http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image166.gif, тобто якщо http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image171.gifто приймають *tg x = t.*

**Основні властивості невизначеного інтеграла.**  
**1) ;**  
  
**2) ;**  
  
**3) ;**  
  
**4) .**  
  
**Таблиця невизначених інтегралів.**  
  
**1. ;**  
  
**2. ;**  
  
**3. ;**  
  
**4. ;**  
  
**5. ;**  
  
**6. ;**  
  
**7. ;**  
  
**8. ;**  
  
**9. ;**  
  
**10. ;**  
  
**11. ;**  
  
**12. ;**  
  
**13. ;**  
  
**14. ;**  
  
**15. ;**  
  
**16. ;**  
  
**17.**

**Питання для самоконтролю:**

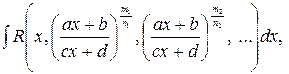
1.Інтегрування раціональних дробів.

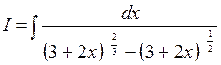
2.Інтегрування тригонометричних функцій.

3.Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

**Додаткові матеріали:**

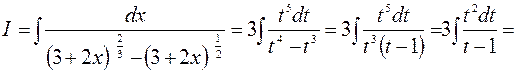
Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

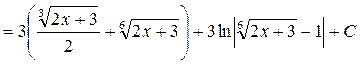
а) Інтеграли типу де R - раціональна функція, m1, n1, m2, n2, …- цілі числа, зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановкою http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image112.gifде s – спільний знаменник показників степенів http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image114.gif

Приклад 3. Знайти інтеграл: .

Спільний знаменник дробів http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image118.gif, http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image120.gifдорівнює s = 6. Застосовуємо підстановку *3+2х = t6*звідки http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image122.gifтоді http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image124.gif, http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image126.gif

Отже,

 http://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image130.gifhttp://ok-t.ru/studopedia/baza5/500625229266.files/image132.gif

.