**самостійна робота №**

**Тема:** Застосування визначених інтегралів для обчислення об'ємів геометричних тіл.

Мета: формування вмінь і навичок обчислення об’ємів геометричних фігур. Розглянути застосування визначених інтегралів до розв’язування задач геометрії.

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

Допоміжна:

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

**План:**

-Застосовувати визначений інтеграл для знаходження об’ємів геометричних фігур

- Обирати правильну формулу для знаходження об’ємів

- Обчислити об’ємів фігури, обмеженої графіками функції

**Методичні рекомендації:**

1. обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона-Лейбніца,

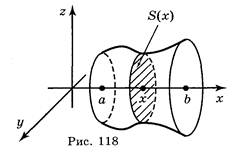
методом заміни змінної та методом інтегрування за частинами.

2. знаходження об’ємів фігури, обмеженої графіками функції

3. обчислити площу плоскої фігури

Поняття інтеграла може бути використано для виведення формули об'ємів тіл.

Розглянемо практичний приклад. Припустимо, що нам потрібно обчислити об'єм лимона, який має неправильну форму, і тому використати яку-небудь відому формулу об'єму неможливо. По­ступимо таким чином. Розріжемо лимон на тоненькі дольки. Кож­ну дольку приблизно можна вважати циліндром, радіус якого можна виміряти. Об'єм такого циліндра легко обчислити за гото­вою формулою. Склавши об'єми маленьких циліндрів, ми одер­жимо приблизно об'єм всього лимона. Наближення буде тим точ­ніше, чим на більш тонкі частини ми зможемо розрізати лимон.

Використаємо аналогічну процедуру для обчислення об'є­му тіла.

На рисунку 118 зображено довільне тіло, об'єм якого по­трібно обчислити. Припустимо, що дане тіло розташоване між паралельними площинами. Вве­демо систему координат так, щоб вісь абсцис була перпенди­кулярна цим площинам. Позначимо через *S(x)* площу перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі абсцис і яка перетинає її в точці *х*; функція *S(x)* неперервна на відрізку [а; *b*].

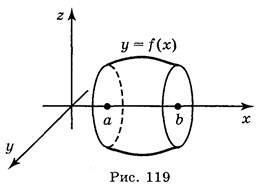
Розділимо відрізок [*а; b*] на *n* рівних відрізків: *x0 = а, х1, x2, ...,* *х*n-1, *хn* = *b* і через точки перетину проведемо площини, пер­пендикулярні осі *ОХ.* Ці площини розріжуть дане тіло на *n* шарів.

Об'єм даного тіла приблизно дорівнює сумі об'ємів шарів з основами S(*x0*), S(*x1*), S(*x2*), …, S(*xn-1*) і висотою Δ*x* = https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image067.png:

V = Vn = S(*x0*)·Δ*x*+ S(*x1*)·Δ*x*+...+ S(*xn-1*) ·Δ*x* = (S(*x0*) + S(*x1*)+...+S(*xn-1*)·Δ*x*.

Точність цього наближення тим вища, чим більше *n*, тобто, тонші прошарки. Природно вважати, що об'єм даного тіла дорівнює границі об'єму V при *n* → https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image069.png: https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image071.png. Сума V є інтегральною сумою для неперервної на відрізку [*а*; *b*] функції *S(x),* отже

https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image073.png   .

Виведемо формулу об'єму тіла обертання. Нехай криволі­нійна трапеція обмежена від­різком [*а; b*] осі абсцис, графі­ком функції *у = f(x),* не­від'ємної і неперервної на від­різку   [*а*; *b*]*,* прямими    *x = а, x*= *b* (рис. 119) обертається на­вколо осі *ОХ.* При обертанні цієї трапеції навколо осі абсцис ут­ворюється тіло, об'єм якого можна обчислити за формулою

https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image076.png .АлеS(*x*) = π*у*2абоS(*x*)*=*π*(f(x))*2,отже*,*

https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image079.png

**Виконання вправ**

Обчисліть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

а)*у = 3х, у = 0, x = 2;*

б)*у* =*https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image017.png, y = 0, x = 2;*

в) *у* = *х2 + 1, у*= 0, *x* = 0, *x =* 2;

г) *у* = *х*3,  *у* = 1, *x* = 2;

д) *y* = *sin x*, *у* = 0, https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image082.png.

*Відповіді:* а) 24π;   б) 2π;   в) 13https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image084.pngπ;   г)17https://fizmat.7mile.net/algebra-11/29-obyem-tila-integral.files/image086.pngπ;   д) 0,5π2.

**Питання для самоконтролю:**

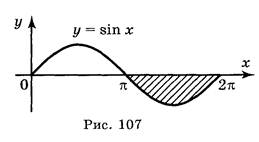
-Застосовувати визначений інтеграл для знаходження площі криволінійної трапеції

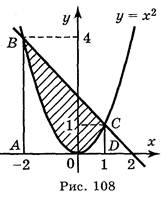
- Обирати правильну формулу для знаходження площі

- Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої графіками функції

**Додаткові матеріали:**

***Приклад 1.*** Обчислити площу фігури, обмеженої лініями *у =* sin *x, у*= 0,            π < *x <*2π.

***Розв'язання***

**Побудуємо фігуру, площу якої треба обчислити (рис. 107). На заданому проміжку функція *у =* sin *x* https://fizmat.7mile.net/algebra-11/27-zastosuvanya-integrala.files/image049.png 0. Тому обчислення площі цієї фігури замінимо об­численням площі криволінійної трапеції, симетричної даній фі­гурі відносно осі абсцис, тобто обмеженої графіком функції *у = - sin x* і віссю абсцис.

https://fizmat.7mile.net/algebra-11/27-zastosuvanya-integrala.files/image051.png= 1 + 1 = 2.

*Відповідь:* 2.

***Приклад 2.*** Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями: *у* = *x2*і *у* = *-x + 2.*

*Розв'язання*

Зобразимо схематично графіки даних функцій (рис. 108). Бачимо, що шукана площа є різницею площ двох криволі­нійних трапецій:

S = S*ABCD*–*SABOCD.*

З рисунка видно, що межі інтегруван­ня для обох трапецій одні і ті самі, це абсциси спільних точок графіків даних функцій. Для знаходження меж інтегру­вання розв'яжемо рівняння:

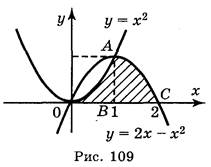
*x*2 = *-x +* 2; *x2 + x - 2* =0; *x1* = -2, *x2* = 1.

Знайдемо шукану площу:

https://fizmat.7mile.net/algebra-11/27-zastosuvanya-integrala.files/image053.png   = 1,5 + 6 – 3 = 4,5.

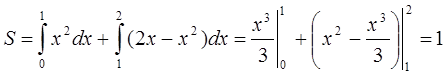
*Відповідь:* 4,5.

***Приклад 3.*** Знайдіть площу фігури, обмеженої параболами *у = х2*і *у = 2х - х2* та віссю *ОХ.*

***Розв'язання***

Побудуємо графіки функцій *у* = *х2і у* = *2х - х2* і знайдемо абсциси то­чок перетину цих графіків із рівнян­ня: *х*2 = 2*х* – *х*2. Корені цього рівнян­ня *х*1*=* 0, *х*2 = 1. Дана фігура зобра­жена на рис. 109.

Із рисунка видно, що ця фігура складається з двох криволінійних трапецій: *ОАВ* і *ВАС.*

Отже, шукана площа дорівнює сумі площ цих трапецій:https://fizmat.7mile.net/algebra-11/27-zastosuvanya-integrala.files/image057.png

*Відповідь: 1.*