**самостійна робота №**

**Тема:** Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця Мінор та алгебраїчне доповнення..

Мета: отримувати знання за темою самостійно; відпрацювати основні навички, прийоми розв’язань; засвоїти уміння самостійно використовувати знання, навички

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

Допоміжна:

1. Роєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра у таблицях. 11 клас: Навч. Посібник. – Х.: «Академія», 2001. – 156с.
2. Валуцэ Н.И. Математика для техникумов . – М. : Наука, 1989. – 576 с., 78117с.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 1983. – 448 с., 224-238с.

**План:**

* Матриці, дії над ними.
* Обернена матриця.
* Ранг матриці.

**Методичні рекомендації:**

Визначник третього порядку

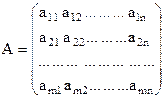
Знаходження оберненої матриці

Знаходження добутку матриць

Дії над матрицями

**Конспективний виклад питань:**

Матрицею розмірності https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image026.gif називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

 .

Числа аij (i = 1, … , m; j = 1, … , n ) називаються елементами матриці А. Відзначаємо, що перший індекс указує номер рядка, другий – номер стовпця.

Для матриць А і В однакової розмірності вводиться операція додавання наступним чином:

С = А + В , якщо cij = aij + bij ,

для усіх і та j . Аналогічно вводиться операція віднімання.

Для будь-якої матриці А та числа λ матрицею λА називається матриця В з елементами bij = λaij , для усіх і та j.

**Приклад.**

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image030.gif , https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image032.gif .

Знайти матрицю 2А + 3В.

**Розв’язання.** https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image034.gif ,

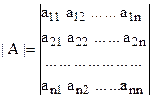
https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image036.gif https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image038.gif .

У подальшому ми визначимо також і операцію множення матриць.

**Визначник матриці**

Якщо https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image040.gif , матриця називається прямокутною, якщо https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image042.gif – квадратною.

Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність число, яке називається її визначником. Визначник позначається так

 .

Число n називається порядком квадратної матриці та її визначника.

**Визначники другого та третього порядку**

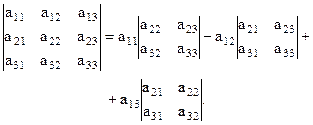
Визначник другого порядку обчислюється за формулою

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image046.gif

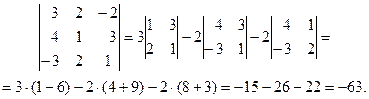
**Приклад.** Обчислити визначник https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image048.gif

**Розв’язання**. https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image050.gif

Визначник третього порядку обчислюється розкладанням по елементам першого рядка, тобто за такою формулою:



**Приклад.** Обчислити визначник  .

**Розв’язання**. 

**Мінор та алгебраїчне доповнення**

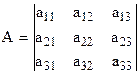
**Елемента визначника**

Мінором https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image058.gif елемента визначника n–го порядку |A| називається визначник порядку n-1, який ми одержимо з визначника |A|, якщо закреслимо i-й рядок та j-й стовпець.

Алгебраїчне доповнення https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image060.gif елемента aij визначається формулою

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image062.gif https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image064.gif https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image066.gif

Наприклад, для визначника третього порядку

 ми маємо:

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image070.gif , https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image072.gif ;

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image074.gif , https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image076.gif ;

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image078.gif , https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image080.gif .

Тоді для визначника |A| має місце формула

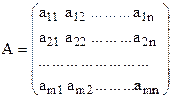
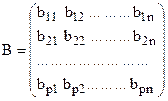
https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image082.gif

Визначник дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Останнє формулювання застосовується також для визначників більш високих порядків.

**Добуток матриць**

Розглянемо дві матриці, одну розмірності https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image084.gif , другу - https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image086.gif :

 ;  ,

де m, n і p довільні натуральні числа.

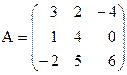
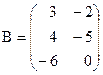
Оскільки кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В, ми можемо установити взаємо однозначну відповідність між елементами будь-якого рядка матриці А та будь-якого стовпця матриці В. Для і-того рядка матриці А та j-того стовпця матриці В елементу аi1 ми ставимо у відповідь b1j , елементу ai2 - b2jі т.д.

Тепер ми можемо визначити добуток будь-якого рядка матриці А на будь-який стовпець матриці В як суму добутків відповідних елементів.

Добутком матриці А розмірності https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image084.gif та матриці В розмірності https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image086.gif називається матриця С розмірності https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image026.gif , якщо кожний елемент сij https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image093.gif https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image095.gif дорівнює добутку і-го рядка матриці А на j-й стовпець матриці В:

сij= ai1b1j+ ai2b2j + . . . + ainbnj . (\*)

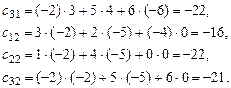
Позначення https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image097.gif .

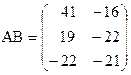
**Приклад.**  ,  .

Знайти А В.

**Розв’язання:**В цьому випадку m = 3, p = 3, n = 2. Нехай С = АВ. Тоді за формулою (\*):

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image103.gif



Отже,  .

Зазначимо, що А·В , взагалі кажучи, не дорівнює В·А, навіть якщо обидва добутки мають зміст.

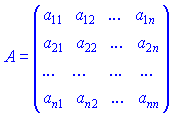
Для визначників квадратних матриць однакового порядку має місце властивість https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image109.gif , тобто визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників матриць співмножників. Якщо |A| = 0, матриця А називається виродженою. Елементи а11, а22, . . . , аnn утворюють головну діагональ матриці А порядку n. Матриця, головна діагональ якої складається з одиниць, а інші елементи – нулі, називається одиничною та позначається літерою Е. Ця матриця виконує функцію одиниці при множенні матриць:

https://konspekta.net/infopediasu/baza15/3485327653333.files/image111.gif , для усіх А.***.***

# **Обернена матриця. Приклади обчислення**

Знаходження оберненої матриці є важливою складовою в розділі лінійної алгебри. З допомогою таких матриць, якщо вони існують, можна швидко знайти розв'язок системи лінійних рівнянь або обчислити матричне рівняння *A\*X=B*.  
Матриця *A-1* називається оберненою до матриці *A*, якщо виконуються наступні рівностіумова існування оберненої матриціЯкщо визначник матриці *A* відмінний від нуля, то матрицю називають неособливоюабо невиродженою. Для того, щоб матриця мала обернену необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

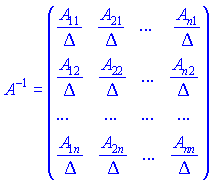
Нехай маємо квадратну матрицюі потрібно знайти обернену до неї. Для цього потрібно виконати наступні дії:

1. Знайти визначник матриці http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_006.gif. Якщо він не рівний нулю то виконуємо наступні дії. В іншому випадку дана матриця вироджена і для неї не існує оберненої.

2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*. Вони рівні мінорам, помноженим на *(-1)i+j* в степені суми рядка і стовпця, для якого шукаємо.

3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці *A* та протранспонувати її. Ця матриця називається приєднаною або союзною і позначається *"А з хвиькою"*http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_010.gif .

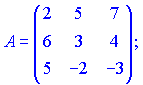
4. Поділити приєднану матрицю на детермінант http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_011.gif. Отримана матриця буде оберненою та задовільнятиме властивостям, які викладені на початку статті.

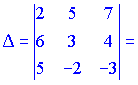
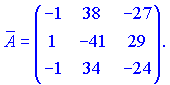
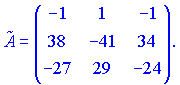
  
Розглянемо приклади обчислення оберненої матриці.

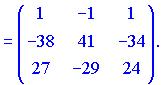
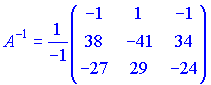
**Приклад 1. Знайти матрицю, обернену до матриці (Дубовик В.П., Юрик І.І. "Вища математика. Збірник задач")**

1) (1.127) http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_013.gif

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці  
визначник матриці, обчислення  
Так як детермінант не рівний нулю (http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_017.gif), то обернена матриця існує. Знаходимо матрицю, складену з алгебраїчних доповнень  
http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_018.gif  
Матриця доповнень набуде вигляду  
матриця доповнень  
Транспонуємо її і отримуємо приєднану http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_020.gif  
приєднана матриця, обчислення  
Поділимо матрицю на визначник і отримаємо обернену  
обернена матриця  
Бачимо, що у випадку, коли визначник рівний одиниці приєднана і обернена матриці співпадають.

2) (1.130) 

Розв'язок. Рахуємо визначник матриці 3 порядку  
  
визначник матриці, обчислення  
визначник матриці, обчислення  
Знаходимо **[матрицю алгебраїчних доповнень](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/algebrajichni-dopovnennya-ta-minori.html" \t "_blank)**http://yukhym.com/images/stories/Matrix/Matx4_026.gif. Для наглядності ми випасали як це робити через мінори (детермінанти) другого порядку  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходженняалгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
алгебраїчні доповнення, обчислення, знаходження  
Кінцевий **вигляд матриці доповнень**наступний  
  
Протранспонувавши її, **знайдемо союзну матрицю**  
  
Далі знаходимо обернену матрицю

  
Посідовність дій досить проста, головне тут навчитися знаходити мінори, а вже через них алгебраїчні доповнення.

**Питання для самоконтролю:**

означення мінору і алгебраїчного доповнення

означення матриці розміром m x n

види матриць ви знаєте?

означення квадратної матриці.

означення одиничної матриці

яка матриця називається оберненою до даної

як знайти обернену матрицю?

що таке ранг матриці?