**самостійна робота №**

**Тема:** Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця Мінор та алгебраїчне доповнення..

Мета: отримувати знання за темою самостійно; відпрацювати основні навички, прийоми розв’язань; засвоїти уміння самостійно використовувати знання, навички

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

Допоміжна:

1. Роєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра у таблицях. 11 клас: Навч. Посібник. – Х.: «Академія», 2001. – 156с.
2. Валуцэ Н.И. Математика для техникумов . – М. : Наука, 1989. – 576 с., 78117с.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 1983. – 448 с., 224-238с.

 **План:**

* Матриці, дії над ними.
* Обернена матриця.
* Ранг матриці.

**Методичні рекомендації:**

Визначник третього порядку

Знаходження оберненої матриці

Знаходження добутку матриць

Дії над матрицями

**Конспективний виклад питань:**

Матрицею розмірності  називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців.

 .

Числа аij (i = 1, … , m; j = 1, … , n ) називаються елементами матриці А. Відзначаємо, що перший індекс указує номер рядка, другий – номер стовпця.

Для матриць А і В однакової розмірності вводиться операція додавання наступним чином:

С = А + В , якщо cij = aij + bij ,

для усіх і та j . Аналогічно вводиться операція віднімання.

Для будь-якої матриці А та числа λ матрицею λА називається матриця В з елементами bij = λaij , для усіх і та j.

**Приклад.**

 ,  .

Знайти матрицю 2А + 3В.

**Розв’язання.**  ,

  .

У подальшому ми визначимо також і операцію множення матриць.

**Визначник матриці**

Якщо  , матриця називається прямокутною, якщо  – квадратною.

Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність число, яке називається її визначником. Визначник позначається так

 .

Число n називається порядком квадратної матриці та її визначника.

**Визначники другого та третього порядку**

Визначник другого порядку обчислюється за формулою



**Приклад.** Обчислити визначник 

**Розв’язання**. 

Визначник третього порядку обчислюється розкладанням по елементам першого рядка, тобто за такою формулою:



**Приклад.** Обчислити визначник  .

**Розв’язання**. 

**Мінор та алгебраїчне доповнення**

**Елемента визначника**

Мінором  елемента визначника n–го порядку |A| називається визначник порядку n-1, який ми одержимо з визначника |A|, якщо закреслимо i-й рядок та j-й стовпець.

Алгебраїчне доповнення  елемента aij визначається формулою

  

Наприклад, для визначника третього порядку

 ми маємо:

 ,  ;

 ,  ;

 ,  .

Тоді для визначника |A| має місце формула



Визначник дорівнює сумі добутків елементів і-го рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Останнє формулювання застосовується також для визначників більш високих порядків.

**Добуток матриць**

Розглянемо дві матриці, одну розмірності  , другу -  :

 ;  ,

де m, n і p довільні натуральні числа.

Оскільки кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В, ми можемо установити взаємо однозначну відповідність між елементами будь-якого рядка матриці А та будь-якого стовпця матриці В. Для і-того рядка матриці А та j-того стовпця матриці В елементу аi1 ми ставимо у відповідь b1j , елементу ai2 - b2jі т.д.

Тепер ми можемо визначити добуток будь-якого рядка матриці А на будь-який стовпець матриці В як суму добутків відповідних елементів.

Добутком матриці А розмірності  та матриці В розмірності  називається матриця С розмірності  , якщо кожний елемент сij   дорівнює добутку і-го рядка матриці А на j-й стовпець матриці В:

сij= ai1b1j+ ai2b2j + . . . + ainbnj . (\*)

Позначення  .

**Приклад.**  ,  .

Знайти А В.

**Розв’язання:**В цьому випадку m = 3, p = 3, n = 2. Нехай С = АВ. Тоді за формулою (\*):





Отже,  .

Зазначимо, що А·В , взагалі кажучи, не дорівнює В·А, навіть якщо обидва добутки мають зміст.

Для визначників квадратних матриць однакового порядку має місце властивість  , тобто визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників матриць співмножників. Якщо |A| = 0, матриця А називається виродженою. Елементи а11, а22, . . . , аnn утворюють головну діагональ матриці А порядку n. Матриця, головна діагональ якої складається з одиниць, а інші елементи – нулі, називається одиничною та позначається літерою Е. Ця матриця виконує функцію одиниці при множенні матриць:

 , для усіх А.***.***

# **Обернена матриця. Приклади обчислення**

Знаходження оберненої матриці є важливою складовою в розділі лінійної алгебри. З допомогою таких матриць, якщо вони існують, можна швидко знайти розв'язок системи лінійних рівнянь або обчислити матричне рівняння *A\*X=B*.
Матриця *A-1* називається оберненою до матриці *A*, якщо виконуються наступні рівностіЯкщо визначник матриці *A* відмінний від нуля, то матрицю називають неособливоюабо невиродженою. Для того, щоб матриця мала обернену необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Нехай маємо квадратну матрицюі потрібно знайти обернену до неї. Для цього потрібно виконати наступні дії:

1. Знайти визначник матриці . Якщо він не рівний нулю то виконуємо наступні дії. В іншому випадку дана матриця вироджена і для неї не існує оберненої.

2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*. Вони рівні мінорам, помноженим на *(-1)i+j* в степені суми рядка і стовпця, для якого шукаємо.

3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці *A* та протранспонувати її. Ця матриця називається приєднаною або союзною і позначається *"А з хвиькою"* .

4. Поділити приєднану матрицю на детермінант . Отримана матриця буде оберненою та задовільнятиме властивостям, які викладені на початку статті.


Розглянемо приклади обчислення оберненої матриці.

**Приклад 1. Знайти матрицю, обернену до матриці (Дубовик В.П., Юрик І.І. "Вища математика. Збірник задач")**

1) (1.127) 

Розв'язок. Обчислюємо визначник матриці

Так як детермінант не рівний нулю (), то обернена матриця існує. Знаходимо матрицю, складену з алгебраїчних доповнень

Матриця доповнень набуде вигляду

Транспонуємо її і отримуємо приєднану 

Поділимо матрицю на визначник і отримаємо обернену

Бачимо, що у випадку, коли визначник рівний одиниці приєднана і обернена матриці співпадають.

2) (1.130) 

Розв'язок. Рахуємо визначник матриці 3 порядку



Знаходимо **[матрицю алгебраїчних доповнень](http://yukhym.com/uk/matritsi-ta-viznachniki/algebrajichni-dopovnennya-ta-minori.html%22%20%5Ct%20%22_blank)**. Для наглядності ми випасали як це робити через мінори (детермінанти) другого порядку








Кінцевий **вигляд матриці доповнень**наступний

Протранспонувавши її, **знайдемо союзну матрицю**

Далі знаходимо обернену матрицю


Посідовність дій досить проста, головне тут навчитися знаходити мінори, а вже через них алгебраїчні доповнення.

**Питання для самоконтролю:**

означення мінору і алгебраїчного доповнення

означення матриці розміром m x n

 види матриць ви знаєте?

означення квадратної матриці.

означення одиничної матриці

яка матриця називається оберненою до даної

як знайти обернену матрицю?

що таке ранг матриці?