**самостійна робота №**

**Тема:** Критерії сумісності системи лінійних рівнянь - теорема Кронекера-Капеллі.

Мета: отримувати знання за темою самостійно; відпрацювати основні навички, прийоми розв’язань; засвоїти уміння самостійно використовувати знання, навички

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

Допоміжна:

1. Роєва Т.Г., Хроленко Н.Ф. Алгебра у таблицях. 11 клас: Навч. Посібник. – Х.: «Академія», 2001. – 156с.
2. Валуцэ Н.И. Математика для техникумов . – М. : Наука, 1989. – 576 с., 78117с.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 1983. – 448 с., 224-238с.

**План:**

* Ранг матриці та способи його обчислення.
* Критерії сумісності систем лінійних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі

**Методичні рекомендації:**

Навчитися використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, встановити чи сумісна система і , якщо сумісна, - розв’язати.

**Конспективний виклад питань:**

* Ранг матриці та способи його обчислення.

Матриця має ранг , якщо серед її мінорів існує хоча б один мінор порядку , відмінний від нуля, а всі мінори порядку  і вищого дорівнює нулю, або не існують.

Приклад 1. Знайти ранг матриці 

Розв’язок. Ця матриця третього порядку, отже, її ранг не може бути більшим трьох. Визначник третього порядку дорівнює нулю:



але існує мінор другого порядку . Ранг матриці А дорівнює двом, 

Приклад 2. Знайти ранг матриці 

Розв’язок. Ця матриця має розмір 3х5, тому її ранг не більший 3. Існує визначник третього порядку . Отже 

Приклад 3. Знайти ранг матриці .

Розв’язок. Розділимо елементи першого рядка на 2, одержимо еквівалентну матрицю (ранг цієї матриці дорівнює рангу вихідної):



Віднімемо з другого і третього рядків перший рядок, помножений відповідно на 3 і 5, одержимо:

.

Віднімемо від третього рядка другий, помножений на 3.

.



При знаходженні рангу матриці, як правило, треба обчислювати велику кількість визначників. Щоб полегшити цей процес, застосовують спеціальні засоби. Ранг можна обчислити, наприклад так: над матрицею послідовно виконують елементарні перетворення до тих пір, поки в кожному рядку і кожному стовпчику стоятиме не більше одного ненульового елемента. Тоді ранг матриці буде дорівнювати числу цих ненульових елементів.

Приклад 4. Знайти ранг матриці .

Розв’язок. Перетворимо в нулі всі елементи першого рядка, крім першого елементу, для чого перший і другий стовпчики залишаємо без зміни, замість третього стовпчика запишемо різницю між першим і третім стовпчиком, а замість четвертого – суму четвертого і першого, помноженого на (-2).

.

Далі без зміни залишаємо перший і третій стовпчики, замість другого запишемо різницю між третім і другим стовпчиками, а замість четвертого – суму четвертого стовпчика і третього, помноженого на -4.

.

І, нарешті, остаточно перетворимо останній стовпчик на нулі. Замість нього запишемо різницю між другим і четвертим стовпчиками.

.

Одержана матриця містить три ненульових елемента, тобто 

1. Розглянемо систему  лінійних рівнянь з  невідомими:

 (1)

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних рівнянь (1) була сумісною, необхідно і досить, щоб ранг матриці системи



дорівнював рангу розширеної матриці

,

тобто

.

При цьому:

1. Якщо ранг матриці системи  дорівнює числу невідомих і , то система має єдиний розв’язок;
2. Якщо ранг матриці системи менший числа невідомих і система сумісна, то вона має безліч розв’язків.

Приклад 1. Чи сумісна система



Розв’язок. Ранг матриці системи



не може бути більшим 3.

Перетворимо матрицю А, помноживши елементи останнього рядка відповідно на -1, -2, -1 і додавши їх до елементів першого, другого і третього рядків:



Обчислимо мінор третього порядку



Отже, .

Обчислимо ранг розширеної матриці:



Обчислимо мінор четвертого порядку, розклавши його по елементам першого стовпчика, а мінор третього порядку – по елементам третього стовпчика.



отже, .

ранг матриць А і  не співпадають, досліджувана система не сумісна.

Приклад 2. Дослідити систему і розв’язати її, якщо вона сумісна



Розв’язок.

.

, 



Легко переконатися, що .

За теоремою Кронекера-Капеллі система сумісна і містить два незалежних рівняння. За ці рівняння можна прийняти перші два рівняння системи, оскільки

.

Тоді

.

Система має безліч розв’язків.

Відповідь: 

Приклад 3. Чи сумісна система?



розв’язок. Ранг матриці системи



не може бути більшим 3.

Перетворимо матрицю А, помноживши елементи останнього рядка відповідно на (-1),(-2), (-1) і додамо їх до елементів першого , другого і третього рядка.

,

.

Отже, 

Обчислимо ранг розширеної матриці.

;

.

Отже, 4.

Ранг матриці А і  різні, тому досліджувана система не сумісна.

Задача 1. У цеху підприємства виготовляють дві моделі жіночого одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2м тканини, на виготовлення другої – 3м. При цьому витрати робочого часу на виробництво цих моделей становить відповідно 4 год. та 5 год. Відомо, що тижневий запас тканини 100 м, а робочий час обмежено 190 год. Скласти такий план тижневого виготовлення цих моделей одягу, при якому повністю використовуються ресурси (тканину і робочий час).

Розв’язок. Позначимо через  і  кількість одиниць тижневого випуску першої та другої моделей відповідно. За умовою задачі складемо систему лінійних рівнянь:

.

Розв’яжемо цю систему матричним способом. Запишемо її в матричному вигляді:

,

де , , 

Для матриці А знайдемо обернену матрицю . Оскільки:

, , ,  .

Тоді

/

Розв’язок системи є

.

, .

отже, для використання ресурсів щотижня треба виготовити 25 одиниць першої і 10 одиниць другої моделі одягу.

Зауважимо, що при розв’язанні економічних задач зручно використовувати матричний спосіб. Обчисливши один раз обернену матрицю та змінюючи обмеження на ресурси (щоденні, щотижневі, щомісячні, щорічні тощо), діставатимемо кожного разу план випуску продукції.

**Завдання для самостійної роботи.**

1. Знайти ранг матриці.

1. . 2.. 3. . 4. .

2. Використовуючи теорему Кронекера-Капеллі, встановити чи сумісна система і , якщо сумісна, - розв’язати.

1.  2. 

**Питання для самоконтролю:**

1. Ранг матриці та способи його обчислення.
2. Критерії сумісності систем лінійних рівнянь,

теорема Кронекера-Капеллі