**самостійна робота №**

**Тема:** Векторний и і мішаний добутки векторів

Мета: формування поняття векторного та мішаного добутку векторів; формування вмінь застосовувати вивчені означення та властивості до розв'язування задач, отримувати знання за темою самостійно; відпрацювати основні навички, прийоми розв’язань; засвоїти уміння самостійно використовувати знання, навички,

Тривалість: 2 год

**Література:**

Основна:

пiдручник для студентiв вищих навчальних закладiв I-II рiвнiв акредитацii МАТЕМАТИКА О.М.Афанасьева, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Слiпкань

Допоміжна:

МАТЕМАТИКА В.Т.Лiсiчкiн,I.Л.Соловейчик пiдручник для техникумiв

**План:**

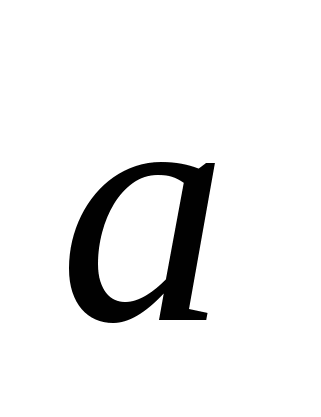
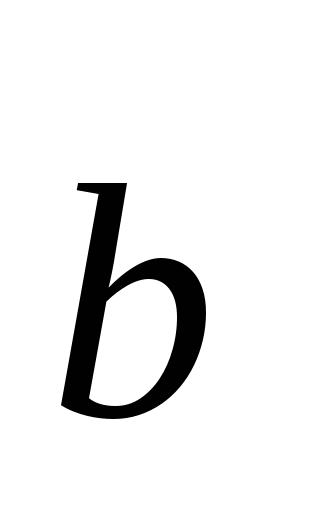
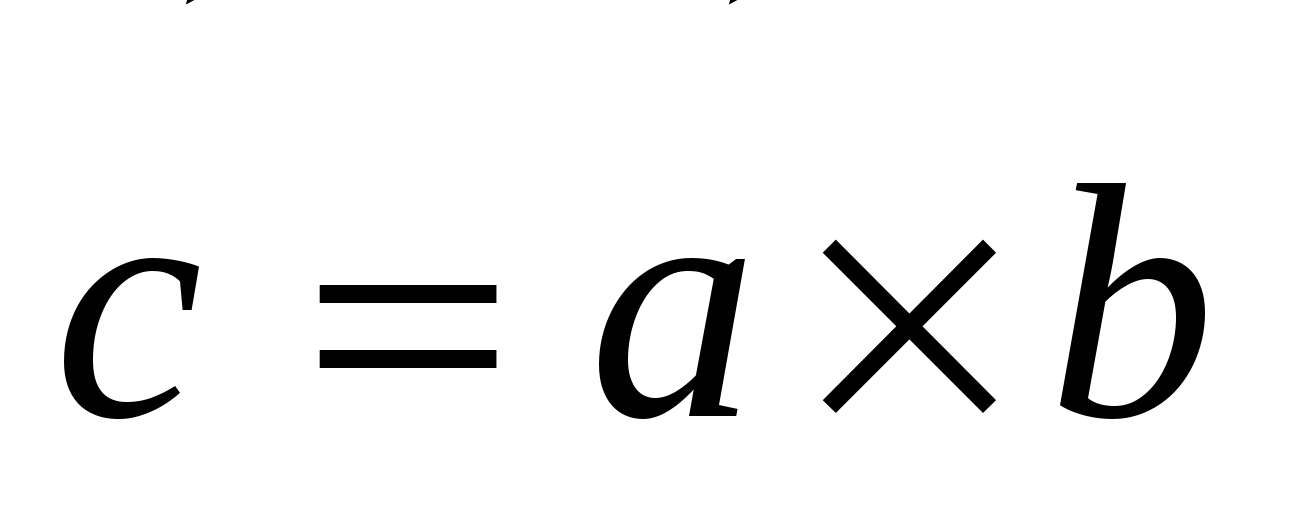
1. Векторний добуток векторів

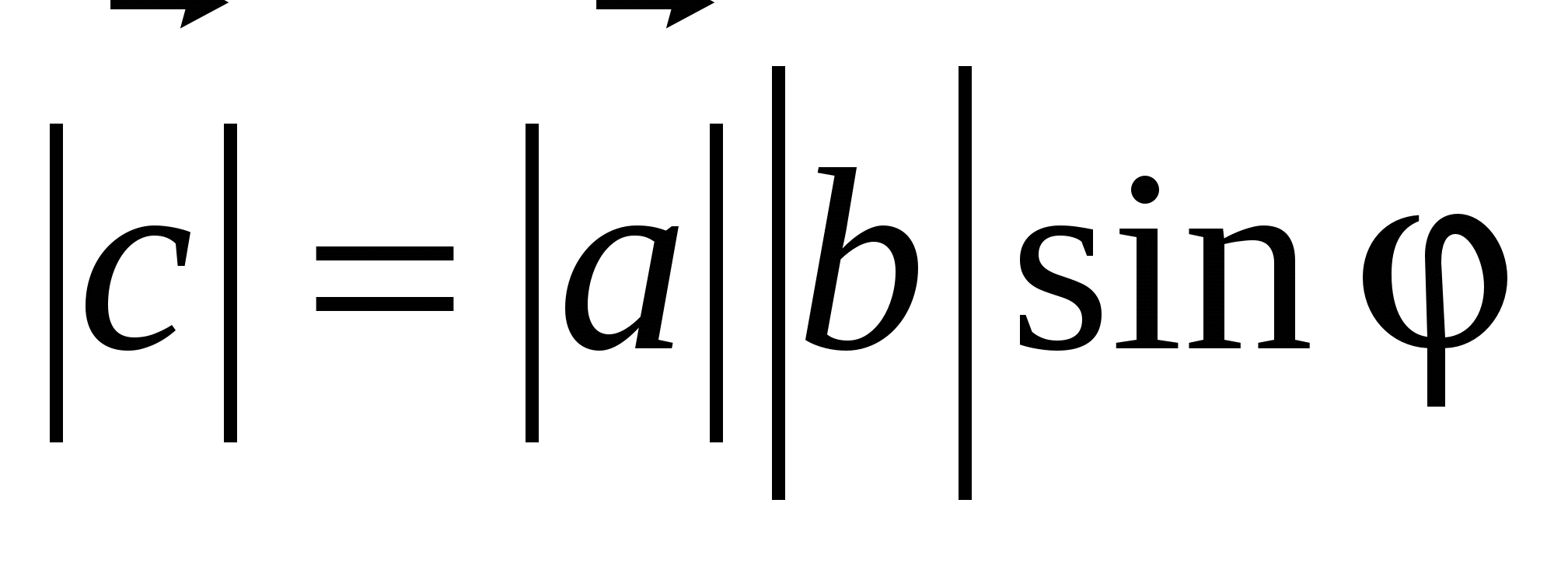
2. Мішаний добуток векторів

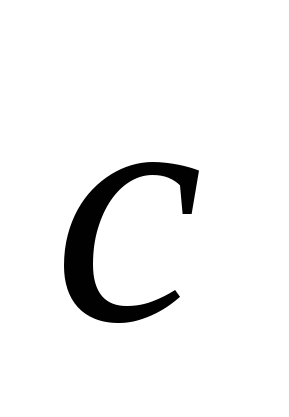
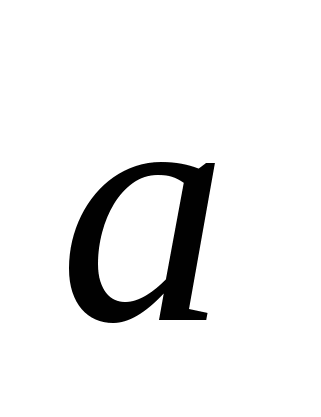
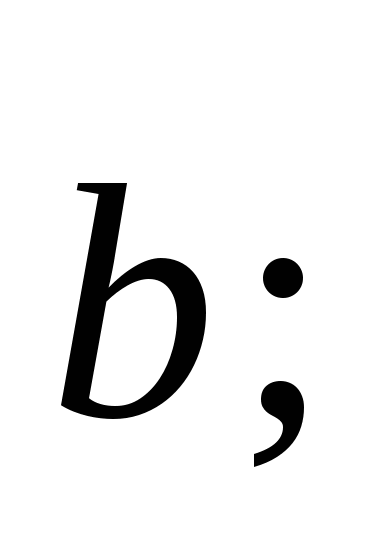
**Методичні рекомендації:**

сформувати означення векторного та мішаного добутків векторів, їх властивості; застосовання означень та властивостей до розв'язування задач.

**Конспективний виклад питань:**

*Означення*. *Векторним добутком вектора *[*на вектор*](http://lecture.in.ua/lekciya-oznachennya-vektoru-napryamleni.html)  називається вектор , якщо:

1) *довжина вектора* , де ϕ — кут між двома векторами;

2) *вектор  перпендикулярний* [до кожного з векторів](http://lecture.in.ua/oznachennya-vektoru-diyi-nad-vektorami-kolinearniste-i-komplan.html) і 

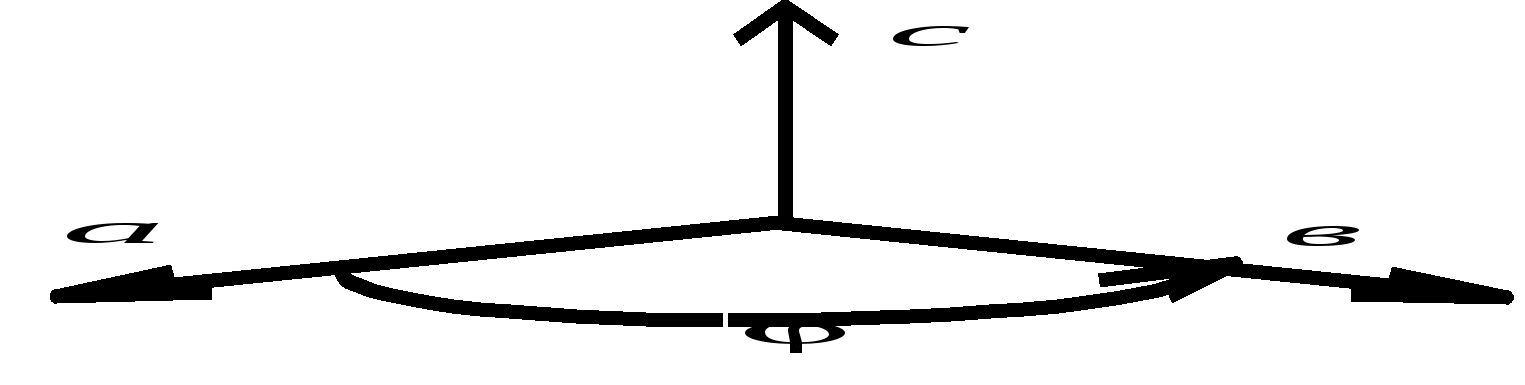
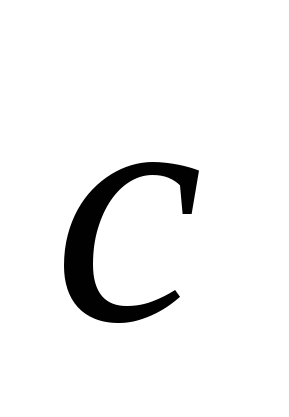
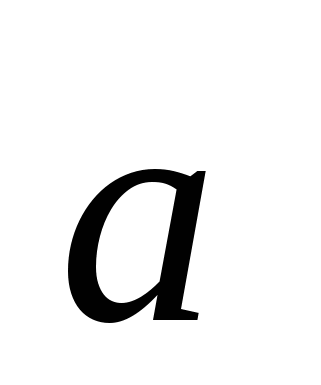
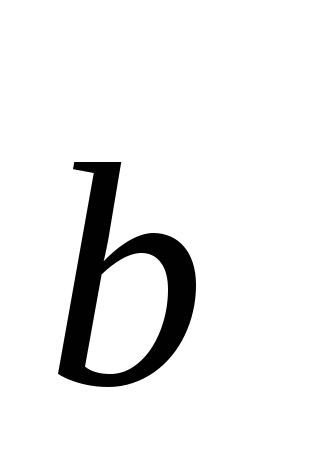
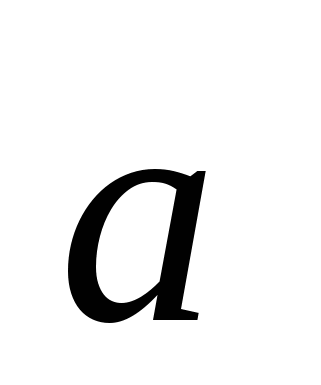
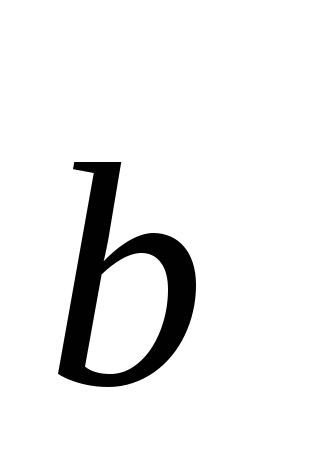
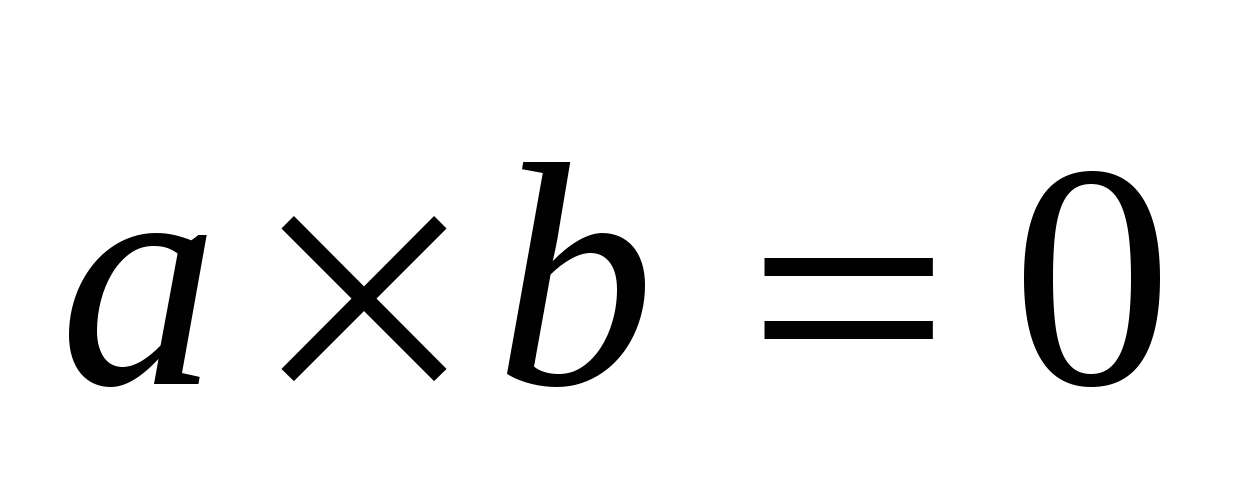
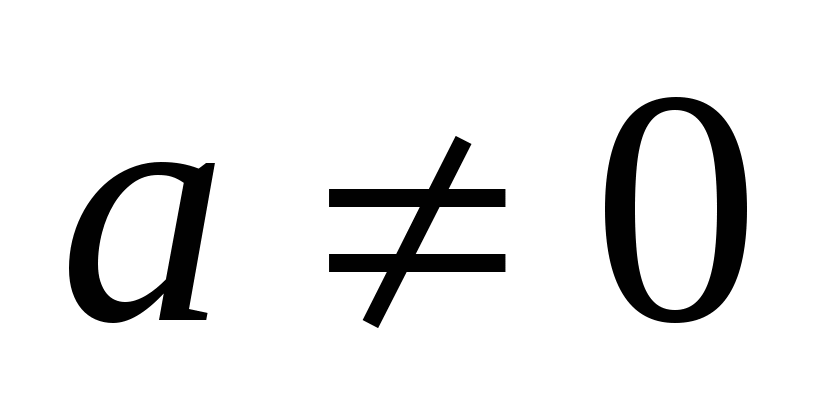
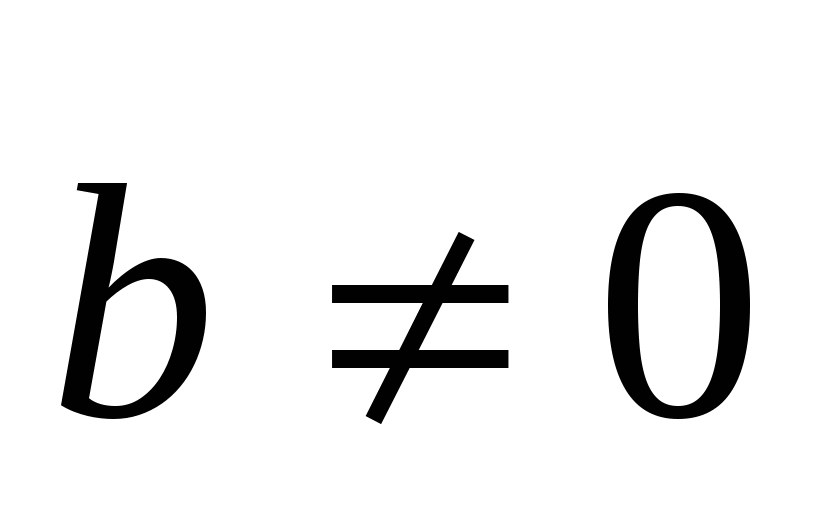
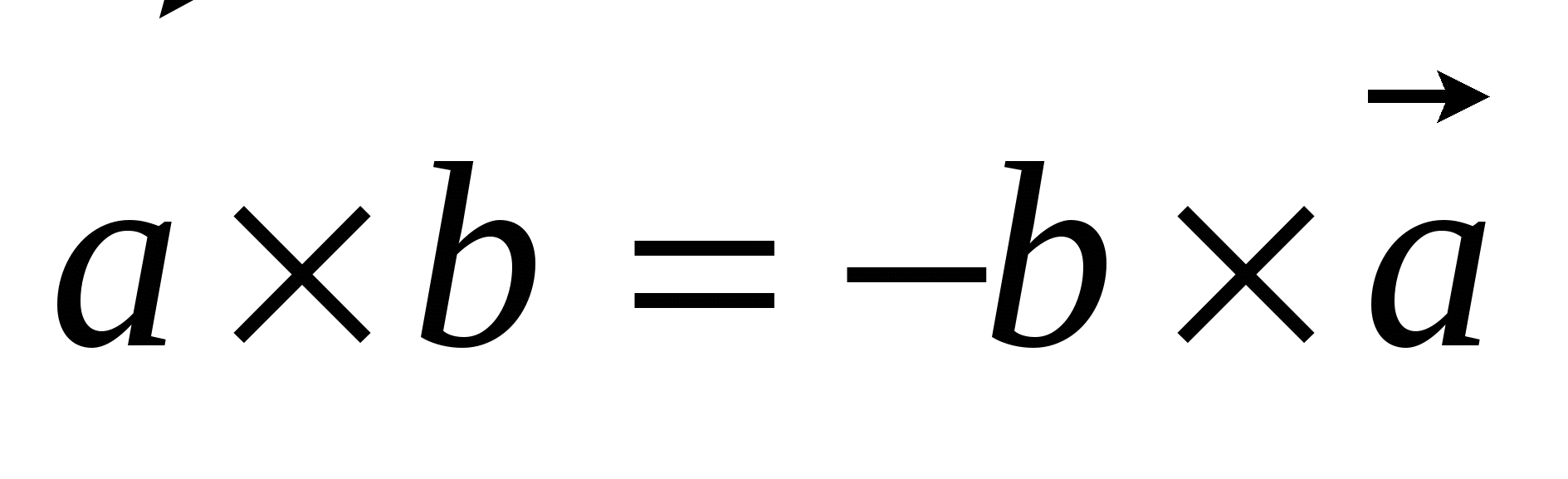
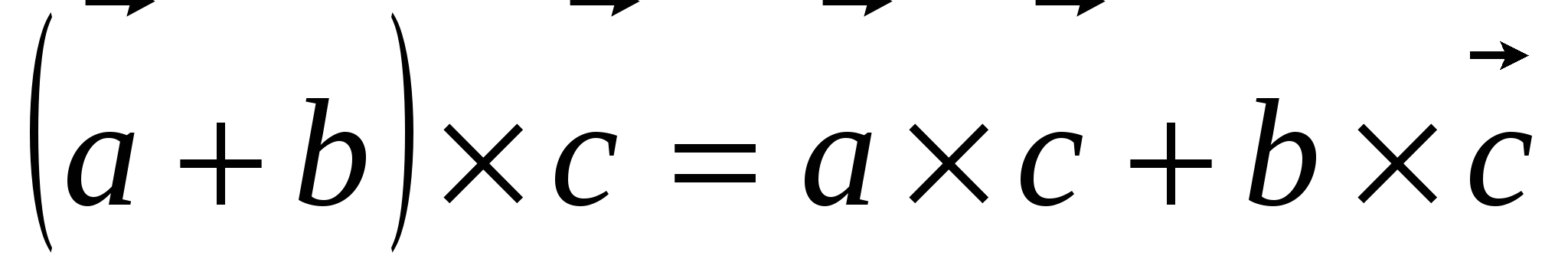


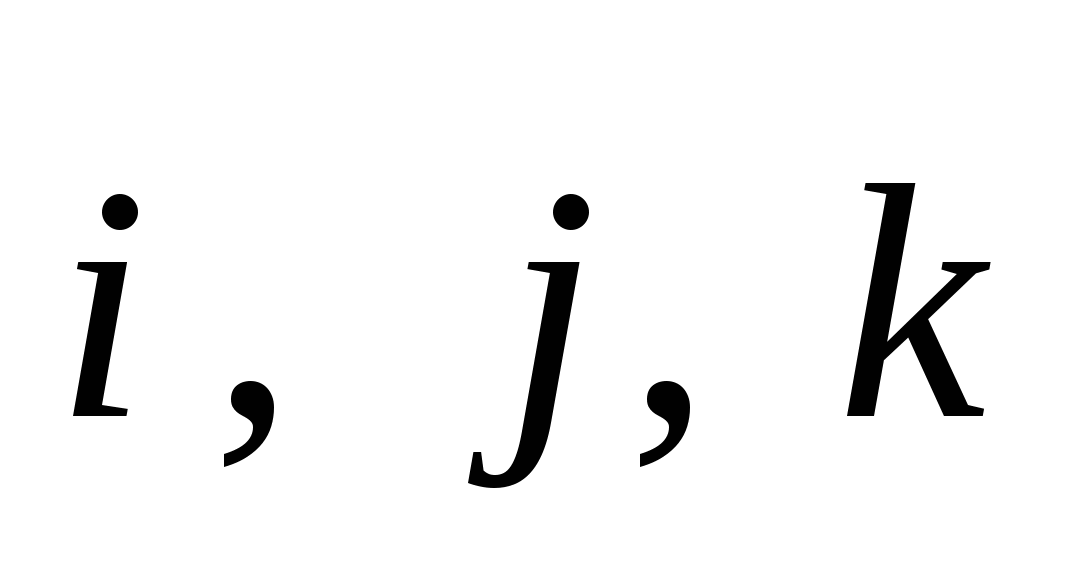
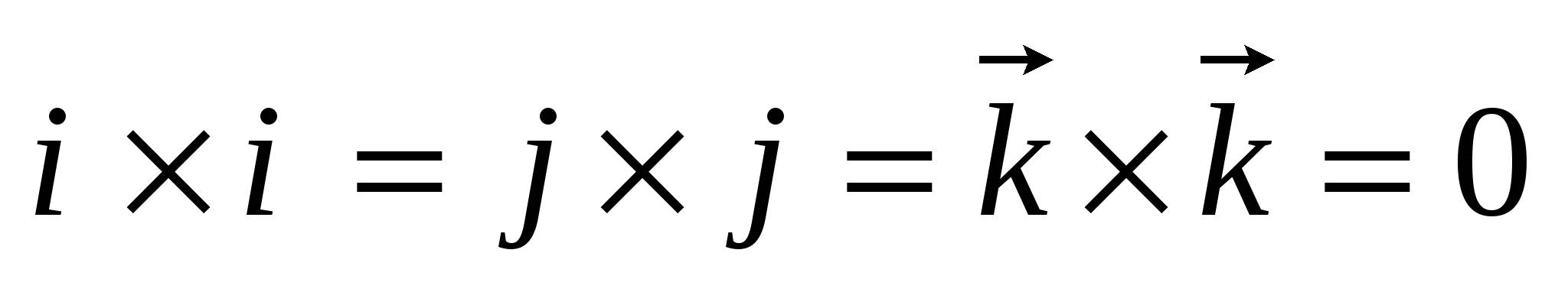
Рис. 3.2   
3) *вектор  спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори  і , [то поворот вектора](http://lecture.in.ua/vektori-diyi-nad-vektorami.html) до вектора  відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.   
  
*Модуль*[*векторного добутку*](http://lecture.in.ua/lekciya-z-mat-analizu-n10.html) двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.   
  
***Властивості векторного добутку***:

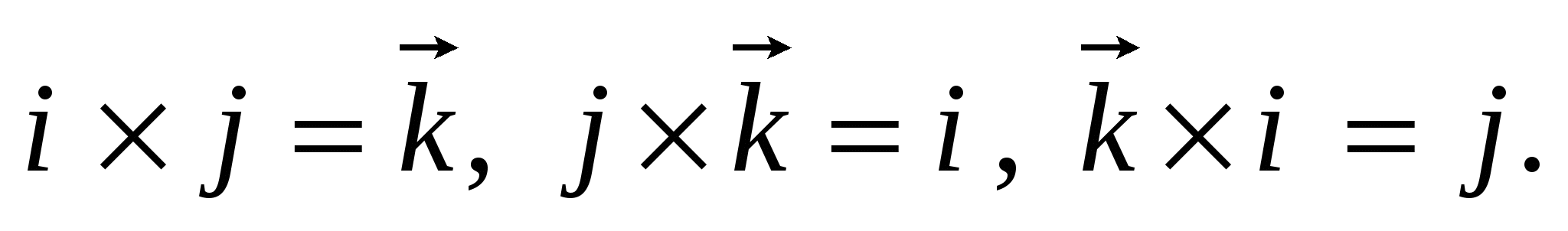
1. , якщо  і  — колінеарні вектори.

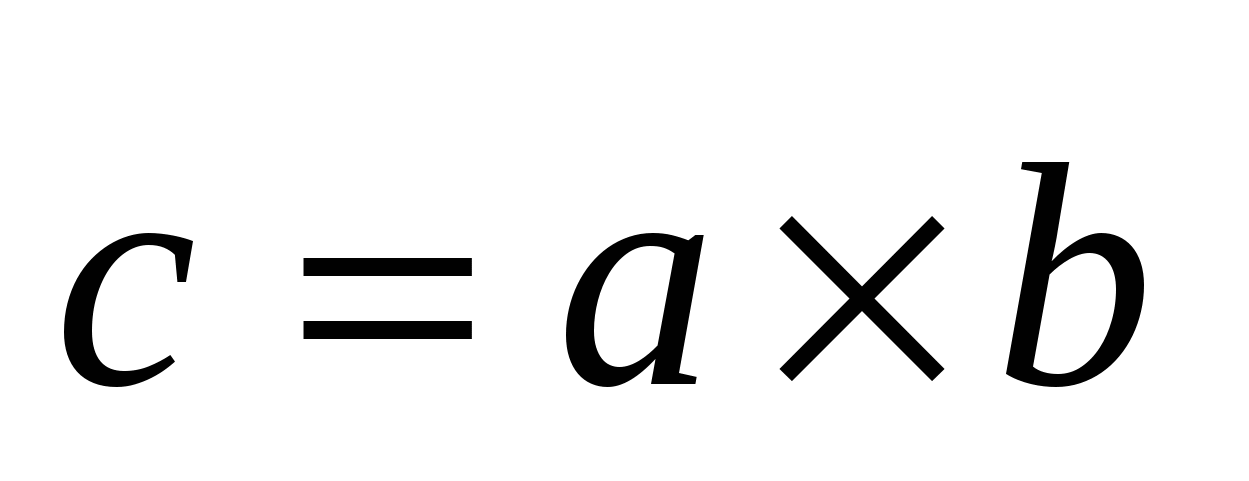
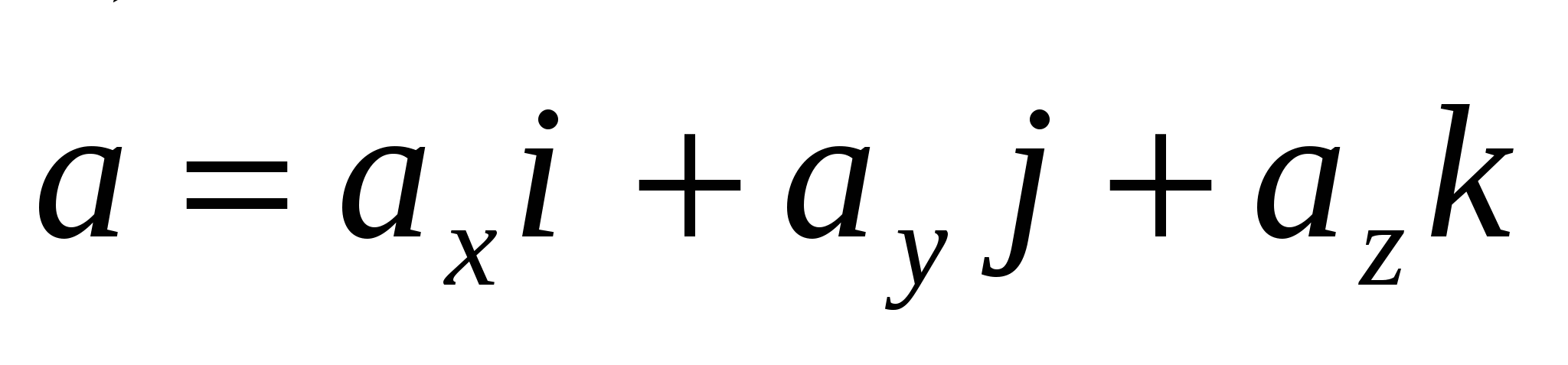
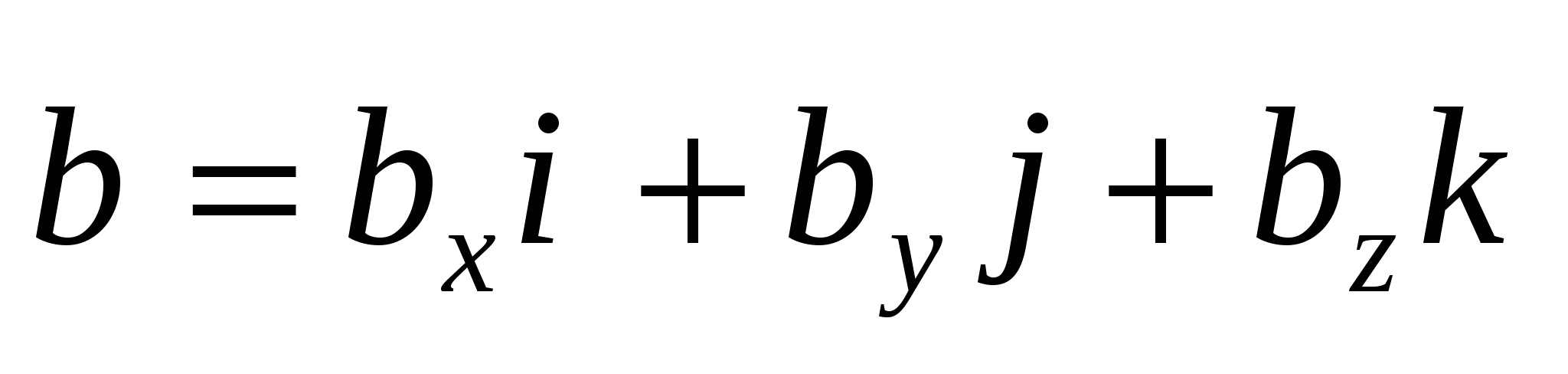
2. .

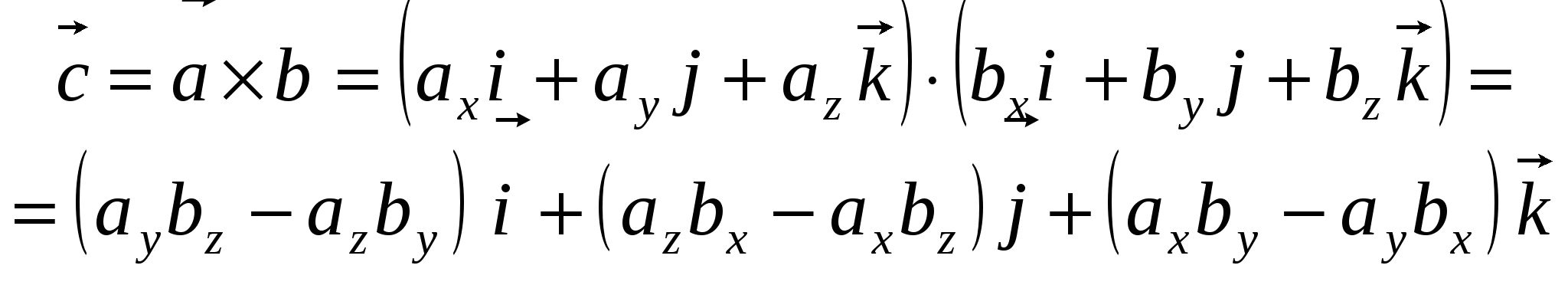
3. .

4. .

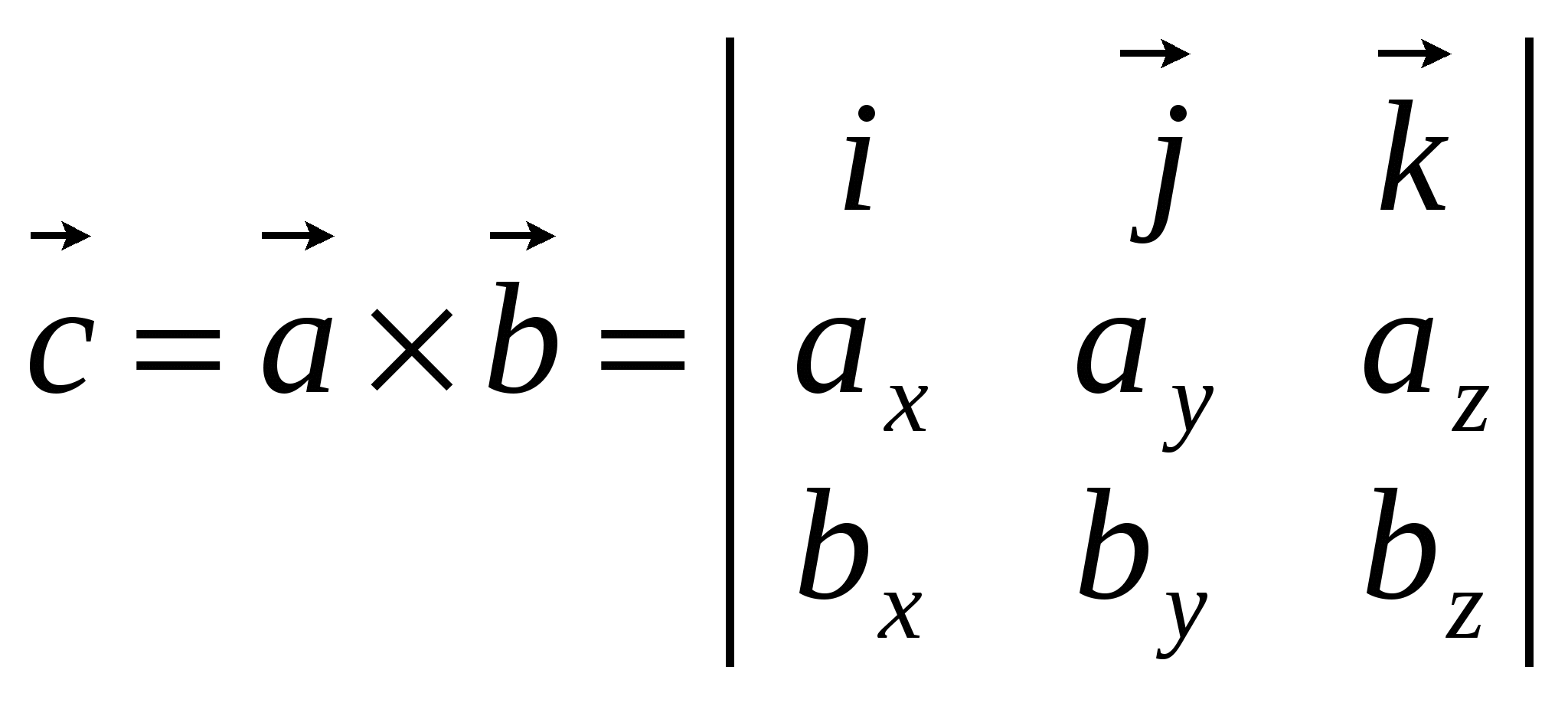
Знайдемо векторні добутки одиничних векторів . З колінеарності векторів випливає: . З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:



Знайдемо координати вектора , якщо , .

 (3.5)

або

.

*Означення. Мішаний добуток векторів — це скалярний добуток вектора a на векторний добуток векторів b і c.*

*Формула обрахунку мішаного добутку векторів*

*Мішаний добуток векторів дорівнює визначнику матриці, отриманої з цих векторів.*

*Мішаний добуток векторів a = {ax; ay; az}, b = {bx; by; bz} и c = {cx; cy; cz} в декартовій системі координат можна обрахувати, скориставшись наступною формулою:*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *a · [b × c] =* | *ax* | *ay* | *az* |
| *bx* | *by* | *bz* |
| *cx* | *cy* | *cz* |

*Властивості мішаного добутку векторів*

* *Геометричний зміст мішаного добутку.*

*Модуль мішаного добутку трьох векторів a, b і сдорівнює об'єму паралелепіпеда, утвореного цими векторами:*

*Vпарал = |a · [b × c]|*

* *Геометричний зміст мішаного добутку.*

*Об'єм піраміди утвореної трьома векторами a, b і с дорівнює одній шостій частині від модуля мішаного добутку цих векторів:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Vпир =* | *1* | *|a · [b × c]|* |
| *6* |

* *Якщо мішаний добуток трьох не нульових векторів дорівнює нулю, то ці [вектори компланарні](http://ua.onlinemschool.com/math/library/vector/coplanarity/).*
* *a · [b × c] = b · (a · c) - c · (a · b)*
* *a · [b × c] = b · [c × a] = c · [a × b] = -a · [c × b] = -b · [a × c] = -c · [b × a]*
* *a · [b × c] + b · [c × a] + c · [a × b] = 0 - тотожність Якобі.*

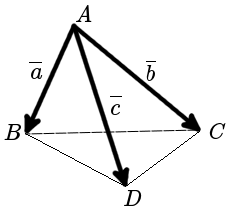
*Приклади задач на обрахунок мішаного добутку векторів*

*Приклад 1. Знайти мішаний добуток векторів a = {1; 2; 3}, b = {1; 1; 1}, c = {1; 2; 1}.*

*Розв'язок:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *a · [b × с] =* | *1* | *2* | *3* | *=* |
| *1* | *1* | *1* |
| *1* | *2* | *1* |

*= 1·1·1 + 1·1·2 + 1·2·3 - 1·1·3 - 1·1·2 - 1·1·2 = 1 + 2 + 6 - 3 - 2 - 2 = 2*

**

*Приклад 2.*

*Знайти об'єм піраміди побудованої на векторах a = {1; 2; 3}, b = {1; -1; 1}, c = {2; 0; -1}.*

*Розв'язок: Знайдемо мішаний добуток цих векторів:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *a · [b × с] =* | *1* | *2* | *3* | *=* |
| *1* | *-1* | *1* |
| *2* | *0* | *-1* |

*= 1·(-1)·(-1) + 2·1·2 + 3·1·0 - 3·(-1)·2 - 2·1·(-1) - 1·1·0 =  
  
= 1 + 4 + 0 + 6 + 2 - 0 = 13*

*Знайдемо об'єм піраміди скориставшись властивостями:*

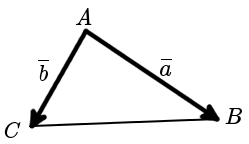
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Vпир =* | *1* | *|a · [b × c]| =* | *13* | *= 2* | *1* |
| *6* | *6* | *6* |

***Приклад 1.*** Знайти векторний добуток векторів a = {1; 2; 3} і b = {2; 1; -2}.

**Розв'язок:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = |
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | -2 |

= **i**(2 · (-2) - 3 · 1) - **j**(1 · (-2) - 2 · 3) + **k**(1 · 1 - 2 · 2) =  
  
= **i**(-4 - 3) - **j**(-2 - 6) + **k**(1 - 4) = -7**i** + 8**j** - 3**k** = {-7; 8; -3}



***Приклад 2.*** Знайти площу трикутника побудованого на векторах a = {-1; 2; -2} і b = {2; 1; -1}.

**Розв'язок:** Знайдемо векторний добуток цих векторів:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a × b = | **i** | **j** | **k** | = |
| -1 | 2 | -2 |
| 2 | 1 | -1 |

= **i**(2 · (-1) - (-2) · 1) - **j**((-1) · (-1) - (-2) · 2) + **k**((-1) · 1 - 2 · 2) =  
  
= **i**(-2 + 2) - **j**(1 + 4) + **k**(-1 - 4) = -5**j** - 5**k** = {0; -5; -5}

З властивостей векторного добутку:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| SΔ = | 1 | |a × b| = | 1 | √02 + 52 + 52 = | 1 | √25 + 25 = | 1 | √50 = | 5√2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

**Відповідь:** SΔ = 2.5√2.

**Питання для самоконтролю:**

1 Основні властивості векторного добутку.

2. Як виражається векторний добуток, коли вектори задані координатами?

3 Як обчислюється площа паралелограма, побудованого на двох векторах?

4. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

5. Як виражається векторний добуток, коли вектори задані координатами?

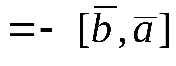
6. Як обчислюється об’єм паралелепіпеда?

7. В чому полягає умова компланарності трьох векторів?

8. Як обчислюється площа трикутника, якщо відомі координати його вершин?

**Додаткові матеріали:**

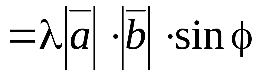
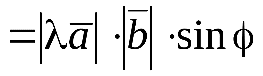
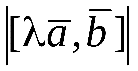
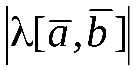
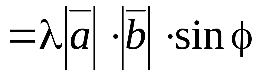
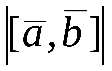
**Властивості векторного добутку.**

1. https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-1jsnjr.png.

Справедливість цієї властивості випливає з означення.

2. https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-YQ3VdI.pnghttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-4FcZeM.png.

Доведення. Нехай https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-RHMOkI.png. Векторhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-O8_3uc.pngперпендикулярний векторам***https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-grbI5L.png***і ***https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-6R29nl.png***(вектори https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-odZSQ1.pngіhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-HgXLTR.pngлежать в одній площині). Векторhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-MVYNKM.pngтакож перпендикулярний векторамhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-6iRWlP.pngіhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-rcPJ8z.png. Отже, векториhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-P5ZuYk.pngіhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-f6Bvc8.pngколінеарні. Очевидно, що їх напрямки співпадають. Вони мають однакову довжину:

і https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-Sj5aDG.png.

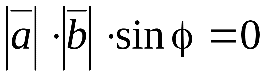
Тому https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-E04slt.pnghttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-s4qjBU.png. Аналогічно доведення приhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-CWTsUW.png.

3. https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-iE6jo9.png.

Приймемо без доведення.

4. Два ненульові вектори https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-LxV8D_.pngіhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-mUdvnG.pngколінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток рівний нульовому вектору, тобто https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-sGtPcr.pnghttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-63ISWU.png.

Доведення. Якщо , то векторhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-EeNh6h.pngза означенням.

Якщо https://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-jI9bTp.png, то. Тодіhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-aHj17Q.pngабоhttps://studfiles.net/html/2706/533/html_FXxEh0ZRBK.v2om/img-nIidyf.png, тобто.